Petr Veselý
1. A4, Gymnázium Václava Hlavatého
Poděbradova 661, 440 62 Louny
C–I–3

Ukázka zápisu řešení úlohy Matematické olympiády kategorie C. Jako ukázka bude řešena následující **návodná úloha** ke 3. úloze domácí části 1. kola MO kategorie C (úloha C–I–3).

Určete všechna reálná čísla x, která vyhovují rovnici $8x - 7\lfloor x \rfloor = 4$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x, tzv. dolní celou část reálného čísla x.)

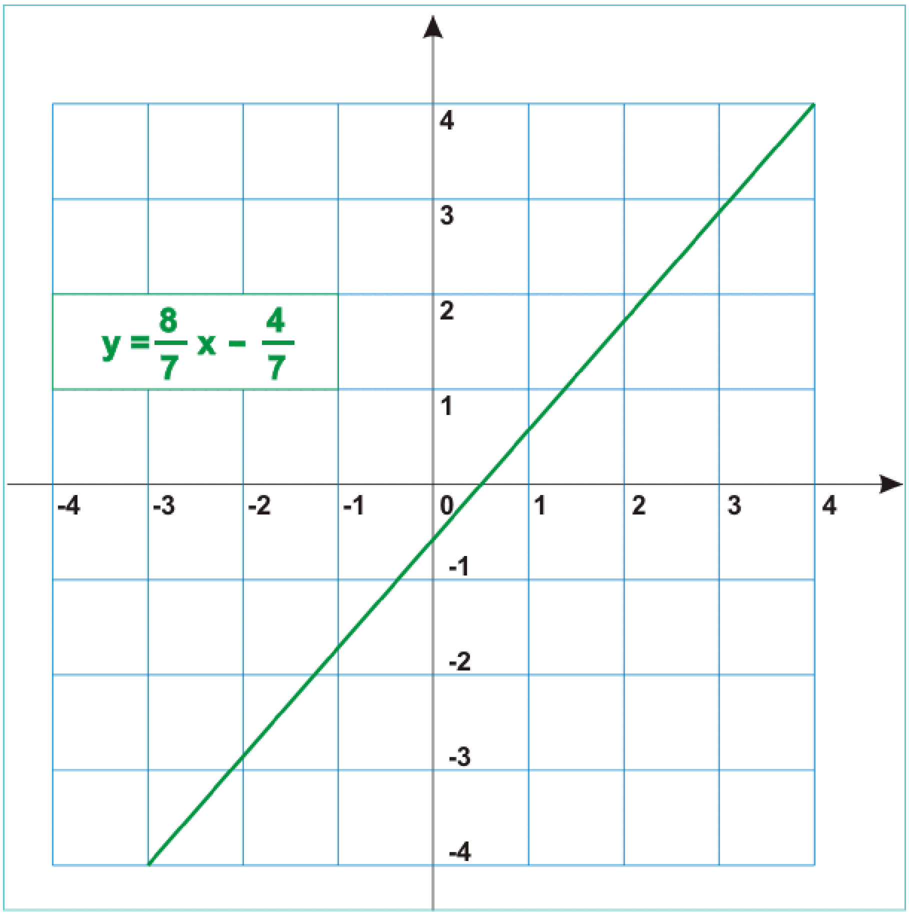
Řešení pište jako výklad, ve kterém jsou uvedeny všechny podstatné úvahy tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup. Jednotlivé stránky řešení úlohy číslujte.

Danou rovnici $\mathbf{8x - 7\lfloor x \rfloor = 4}$ upravíme takto:

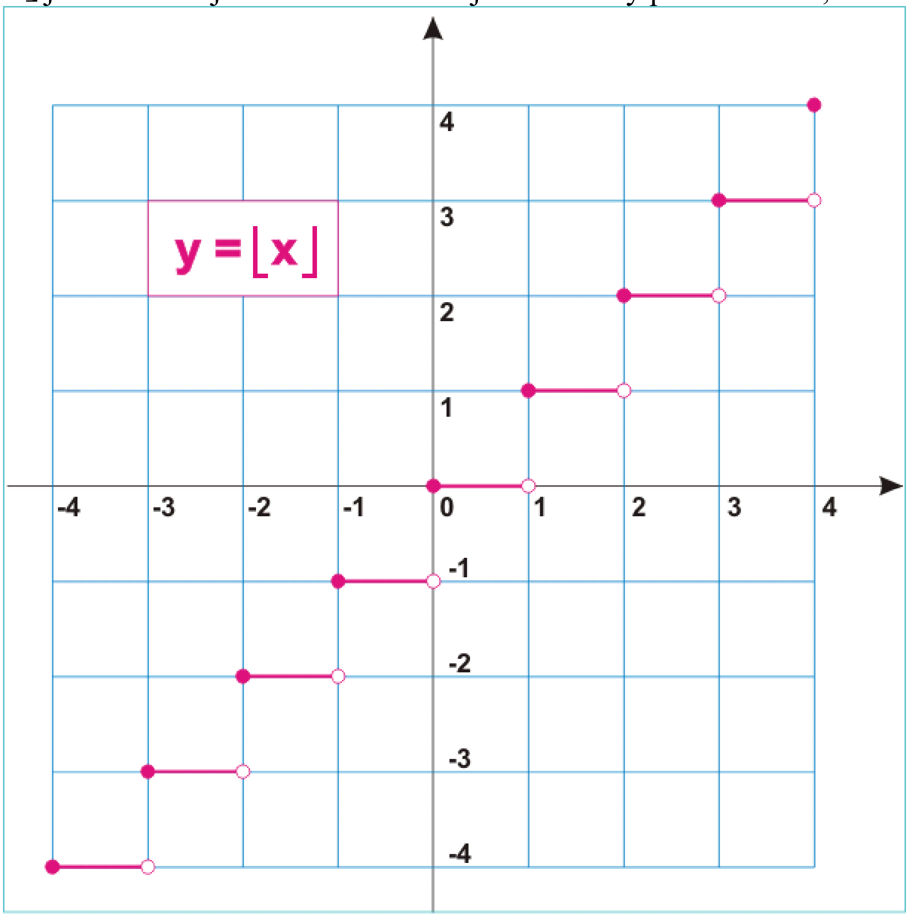
$$8x - 7\lfloor x \rfloor = 4 \qquad / + 7\lfloor x \rfloor$$
$$8x = 7\lfloor x \rfloor + 4 \qquad / - 4$$
$$8x - 4 = 7\lfloor x \rfloor \qquad / : 7$$
$$\frac{8}{7}x - \frac{4}{7} = \lfloor x \rfloor$$

Upravenou rovnici budeme řešit nejdříve graficky. Umíme narýsovat grafy funkcí **f**: $y = \frac{8}{7}x - \frac{4}{7}$ a **g**: $y = \lfloor x \rfloor$.

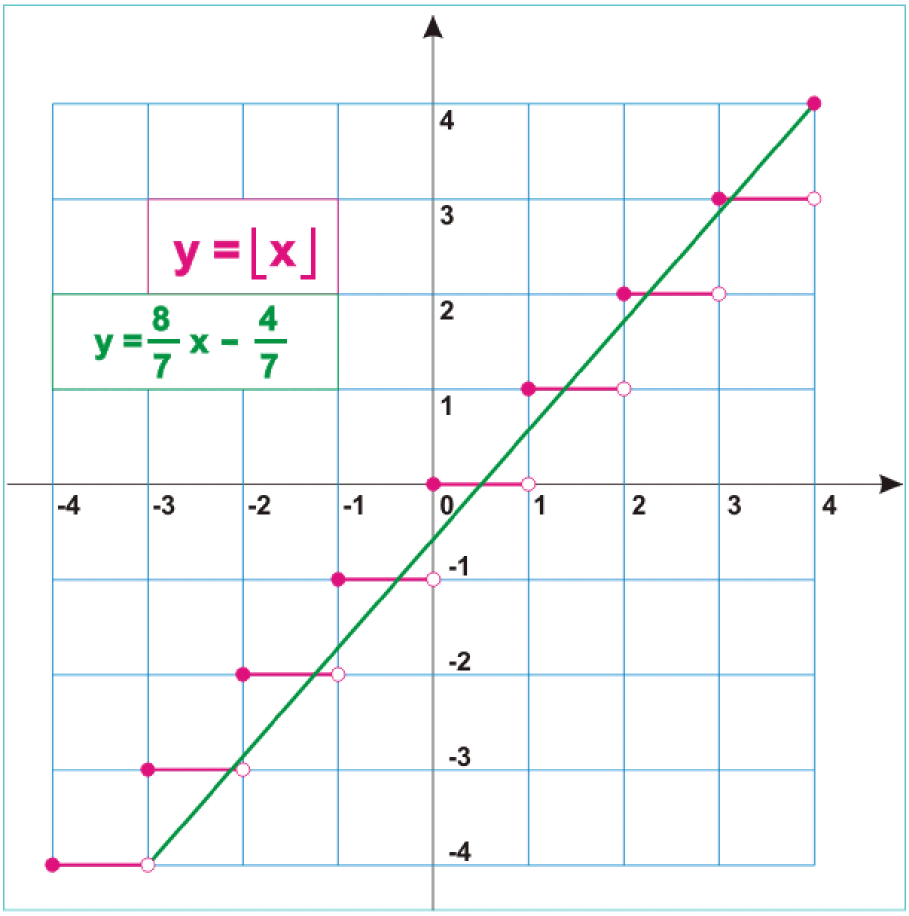
Funkce **f** je lineární funkcí, grafem je přímka, která prochází například body [– 3; – 4] a [4; 4]. Funkce **f** protíná osu **x** v bodě [0,5; 0] a osu **y** v bodě [0; $-\frac{4}{7}$]. Graf funkce **f** je na následujícím obrázku.



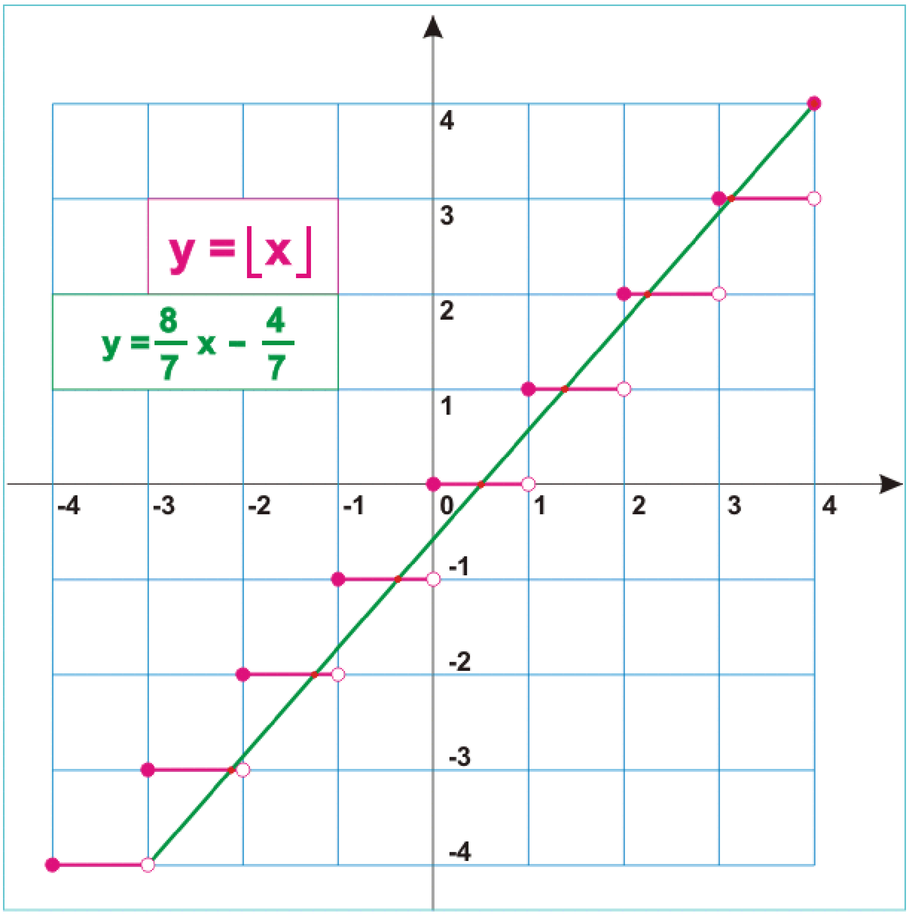
Graf funkce **g**: $y = \lfloor x \rfloor$ je na následujícím obrázku. Graf je nakreslený pro $x \in \langle -4; 4 \rangle$.



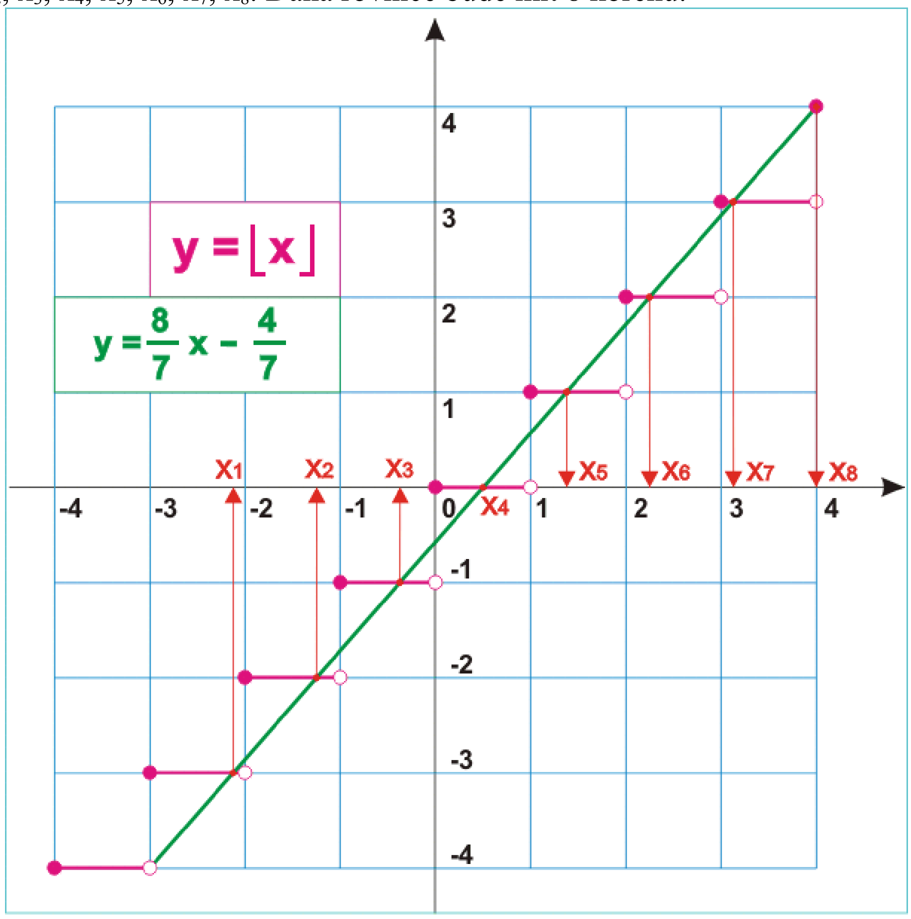
Grafy obou funkcí narýsujeme v jedné soustavě souřadné, ukazuje to následující obrázek, grafy funkcí jsou pro přehlednost rozlišené barevně.



V obrázku vidíme, ve kterých bodech se grafy funkcí protínají, tyto body si zřetelně označíme, protože x-ové souřadnice těchto bodů budou řešením dané rovnice. V následujícím obrázku jsou společné body označené červeným puntíkem.



Nyní nás budou zajímat x-ové souřadnice všech společných bodů, na následujícím obrázku jsou vyznačené a jsou popsané $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Daná rovnice bude mít 8 kořenů.



Na obrázku je vidět, mezi kterými celými čísly budou jednotlivé kořeny rovnice $\mathbf{8\,x - 7\lfloor x \rfloor = 4}$ ležet.
Protože x_1 leží mezi čísly – 3 a – 2 ($-3 < x_1 < -2$) a protože pro každé reálné číslo $x \in (-3; -2)$ platí $\lfloor x \rfloor = -3$**,** můžeme do dané rovnice za $\lfloor x \rfloor$ dosadit číslo – 3. Dostaneme rovnici $8x - 7(-3) = 4$, která má jediné řešení $x = -\frac{17}{8}$. Tím jsme vypočítali první kořen dané rovnice $\mathbf{x_1 = -\frac{17}{8} = -2{,}125}$. Obdobně budeme pokračovat v ostatních případech.
$x_2 \in (-2; -1)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = -2$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7(-2) = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_2 = -\frac{5}{4} = -1{,}25}$.
$x_3 \in (-1; 0)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = -1$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7(-1) = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_3 = -\frac{3}{8} = -0{,}375}$**.**
$x_4 \in (0; 1)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = 0$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7 \,.\, 0 = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_4 = 0{,}5}$.
$x_5 \in (1; 2)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = 1$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7 \,.\, 1 = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_5 = \frac{11}{8} = 1{,}375}$.
$x_6 \in (2; 3)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = 2$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7 \,.\, 2 = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_6 = \frac{9}{4} = 2{,}25}$.
$x_7 \in (3; 4)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = 3$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7 \,.\, 3 = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_7 = \frac{25}{8} = 3{,}125}$.
$x_8 \in \langle 4; 5)$, pro každé reálné číslo x z tohoto intervalu platí $\lfloor x \rfloor = 4$**.** Po dosazení do dané rovnice dostaneme rovnici $8x - 7 \,.\, 4 = 4$, řešením rovnice dostaneme $\mathbf{x_8 = 4}$**.**

U každého z řešení dané rovnice se můžeme zkouškou přesvědčit, že tomu tak skutečně je. Například pro $\mathbf{x_5 = \frac{11}{8} = 1{,}375}$ dostaneme po dosazení do rovnic $\mathbf{8 \,.\, 1{,}375 - 7\lfloor 1{,}375 \rfloor = 4}$**,** po výpočtech dostaneme $11 - 7 \,.\, 1 = 4$, tedy $4 = 4$ a to jistě platí.
Dále se můžeme přesvědčit, že daná rovnice nemá další řešení například v intervalu $\langle 5; 6)$. To už na grafu není vidět, dá se to však vypočítat. Kdyby daná rovnice měla v intervalu $\langle 5; 6)$ řešení, platilo by $\lfloor x \rfloor = 5$**.** Po dosazení do dané rovnice za $\lfloor x \rfloor$ dostaneme rovnici $8x - 7 \,.\, 5 = 4$, která má řešení $x = \frac{39}{8}$ $\mathbf{= 4{,}875}$**.**

Provedeme-li však zkoušku, dostaneme $8 \,.\, 4{,}875 - 7 \,.\lfloor 4{,}875 \rfloor = 4$, dále dostaneme $39 - 7 \,.\, 4 = 4$, tedy $11 = 4$ a to určitě neplatí. Vypočítané číslo 4,875 nemůže být kořenem dané rovnice.
Podobně lze uvažovat i v dalších intervalech, například $\langle -4; -3)$, $\langle -5; -4)$, … .

Závěr:

Daná rovnice má osm kořenů a jsou to čísla $x_1 = -\frac{17}{8} = -2{,}125$, $x_2 = -\frac{5}{4} = -1{,}25$, $x_3 = -\frac{3}{8} = -0{,}375$, $x_4 = 0{,}5$, $x_5 = \frac{11}{8} = 1{,}375$, $x_6 = \frac{9}{4} = 2{,}25$, $x_7 = \frac{25}{8} = 3{,}125$, $x_8 = 4$.