2. písemná práce – oddělení M – 23. 1. 2017 – třída 4. A4

1. Kolik peněz musí pan Dvořák uložit, aby při ročním úročení 4,3% a dani z úroku 15% měl za pět let 100 000,- Kč? Výsledek zaokrouhlete na celé koruny.

$A_5 = A_0\left(1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right)^5$ $\qquad A_0 = \frac{A_5}{\left(1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right)^5} = \frac{100000}{(1+0{,}043\cdot 0{,}85)^5} = 83569{,}67633 \doteq 83570$,-Kč

Pokud chce mít pan Dvořák po pěti letech 100000,- Kč, musí uložit za daných podmínek částku 83570,- Kč.

2. Pan Šťastný vyhrál 1 500 000 Kč. Počátkem roku uloží tuto částku na úrok 1,3%, daň z úroku je 15%. Kolik peněz může na konci každého roku vybírat, jestliže vybírá jen úroky?

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right) = A_0 + A_0\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)$$

$$Úrok = A_0\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{d}{100}\right) = 1500000\cdot 0{,}013\cdot 0{,}85 = 16575{,}-Kč$$

Pan Šťastný může na konci každého roku vybírat úrok 16575,- Kč.

3. Danou nekonečnou geometrickou řadu zapište pomocí sumy.

2 – 4 + 8 – 16 + 32 – 64 + . . . = $(-1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n$

4. Určete součet řady $7-\frac{7}{2}+\frac{7}{4}-\frac{7}{8}+\cdots$ **= $\frac{14}{3}$**

$a_1 = 7$; $q = -\frac{1}{2}$; $|q| < 1$; $s = \frac{7}{1+\frac{1}{2}} = \frac{14}{3}$

5. Nekonečná geometrická řada má součet 2 a její kvocient má hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Jakou hodnotu má první člen řady? Rozepište řadu ve tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$

$$s = \frac{a_1}{1-q};\ 2 = \frac{a_1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}};\ 2 = \frac{a_1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}};\ 2 = \frac{2\,a_1}{2-\sqrt{2}};\ 1 = \frac{a_1}{2-\sqrt{2}};\ a_1 = 2-\sqrt{2}$$

$$(2-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1) + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right) + \cdots$$

6. Periodické číslo $4,\overline{13}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

$4,\overline{13} = 4 + 0,\overline{13} = 4 + 13\cdot(10^{-2}+10^{-4}+10^{-6}+\cdots) = 4 + 13\cdot\frac{1}{99} = \frac{409}{99}$

7. Vypočítejte $25 \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[9]{25} \cdot \sqrt[27]{25} \cdot \ldots$

$$25 \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[9]{25} \cdot \sqrt[27]{25} \cdot \ldots = 25 \cdot 25^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{9}} \cdot 25^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots = 25^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots} = 25^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$$

8. Řešte v R rovnici $(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \ldots = \frac{2x+4}{2-x}$

D = R – {2}

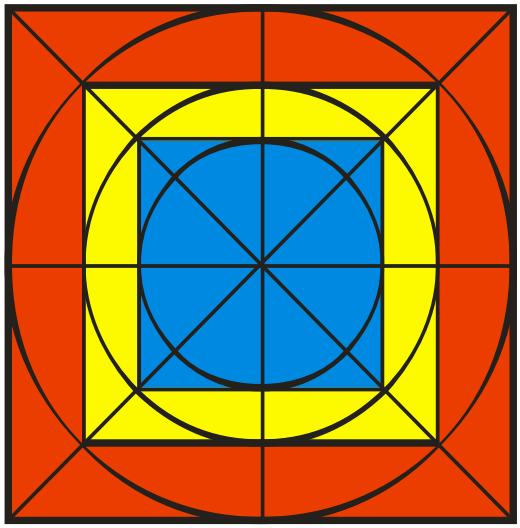
$a_1 = x - 1\,;\, q = x - 1\,;\, |x-1| < 1\,;\, x \in (0;2)\,;\, s = \frac{x-1}{2-x}$

$$\frac{x-1}{2-x} = \frac{2x+4}{2-x}$$
$$x - 1 = 2x + 4$$
$$x = -5$$

Číslo – 5 však nesplňuje podmínku konvergence dané nekonečné geometrické řady [$-5 \notin (0;2)$], nemůže být tedy kořenem dané rovnice.

Závěr řešení úlohy: K = {}

9. Do čtverce o straně délky 8 cm je vepsán kruh, do něho pak čtverec, do toho opět kruh atd. do nekonečna. Vypočítejte součet obsahů všech těchto čtverců.



$S_1 = 64\ cm^2$
$S_2 = 32\ cm^2$
$S_3 = 16\ cm^2$
.
.
.
$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = 64 + 32 + 16 + \ldots = 128\ cm^2$

BODOVÉ HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH ÚLOH (3; 3; 1; 3; 3; 3; 3; 7; 3) – CELKEM MAXIMÁLNĚ 29 BODŮ

ZNÁMKOVÉ HODNOCENÍ:

Známka	Body
1	25 - 29
2	20 - 24
3	15 - 19
4	10 - 14
5	0 - 9