

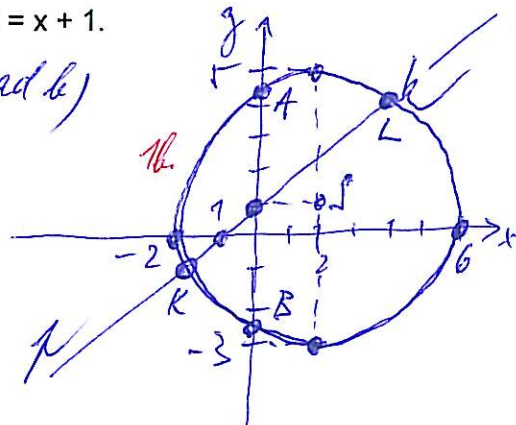
1. Je dána kružnice $k: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$.

- 3h. a) Určete souřadnice středu a poloměr kružnice.
1h. b) Kružnici k zobrazte v soustavě souřadné.
4h. c) Určete průsečíky dané kružnice s osou y .
5h. d) Určete vzájemnou polohu dané kružnice a přímky $p: y = x + 1$.

13h.

ad a) $(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 11 = 0$
 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$; $S[2; 1]$ $r=4$

ad b)



ad c) $x=0$: $y^2 - 2y - 11 = 0$
 $D = 4 + 44 = 48 = 3 \cdot 16$; $\sqrt{D} = 4\sqrt{3}$
 $y_{1,2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{3}$
 $y_1 = 1 + 2\sqrt{3}$ $y_2 = 1 - 2\sqrt{3}$
 $x_1 = 0$ $x_2 = 0$
 $A[0; 1 + 2\sqrt{3}]$ $B[0; 1 - 2\sqrt{3}]$

ad d) $x^2 + (x+1)^2 - 4x - 2(x+1) - 11 = 0$
 $x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 2x - 2 - 11 = 0$
 $2x^2 - 4x - 12 = 0$
 $x^2 - 2x - 6 = 0$
 $D = 4 + 24 = 28 = 4 \cdot 7$; $\sqrt{D} = 2\sqrt{7}$
 $x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$

$x_1 = 1 + \sqrt{7}$ $x_2 = 1 - \sqrt{7}$
 $y_1 = 2 + \sqrt{7}$ $y_2 = 2 - \sqrt{7}$
 Přímka p je secantou
 kružnice k . Průsečíky
 p s kružnicí k jsou body K, L .
 $K[1 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}]$
 $L[1 - \sqrt{7}; 2 - \sqrt{7}]$

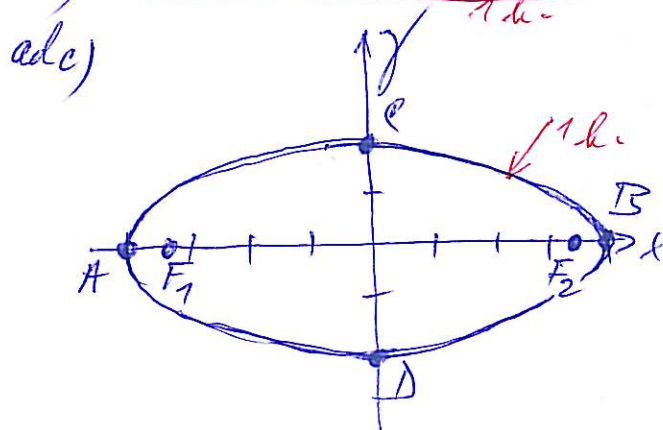
2. Je dána elipsa $E: x^2 + 4y^2 = 16$.

- a) Určete délku hlavní i vedlejší osy elipsy, vypočítejte výstřednost elipsy.
 b) Určete souřadnice bodů S, A, B, C, D, F_1, F_2 .
 c) Elipsu zobrazte v soustavě souřadné.
 d) Napište obecnou rovnici tečny k dané elipse v bodě dotyku $T[2; y_0 > 0]$.

13h.

ad a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ $a=4$ $b=2$ $c=2\sqrt{3}$

ad b) $S[0; 0]$ $A[-4; 0]$ $B[4; 0]$ $C[0; 2]$ $D[0; -2]$ $F_1[-2\sqrt{3}; 0]$ $F_2[2\sqrt{3}; 0]$



ad d) $T \in E: 4 + 4y^2 = 16$
 $4y^2 = 12$
 $y^2 = 3$
 $|y_0| = \sqrt{3}$
 $y_0 = \sqrt{3}$ $y_0 = -\sqrt{3}$

$T[2; \sqrt{3}]$

$t: \frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{4} = 1$

$\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}y}{4} = 1$

$t: x + \sqrt{3}y - 4 = 0$

3. V aritmetické posloupnosti platí $a_2 + a_9 = 31 \wedge a_4 + a_5 = 25$.

- 11h. a) Určete a_1, d, a_{20}, s_{100} .
2h. b) Posloupnost určete vzorcem pro n -tý člen.
2h. c) Posloupnost určete rekurentně.
3h. d) Jaké vlastnosti má daná posloupnost?

ada) $2a_1 + 9d = 31$
 $2a_1 + 7d = 25$

$2d = 6, d = 3, a_1 = \frac{31 - 9d}{2} = 2$ 1h.

$a_{20} = a_1 + 19d = 2 + 57 = 59$ 1h.

$A_{100} = 50(2 + 2 + 99 \cdot 3) = 50 \cdot 301 = 15050$ 1h.

4. Na střeše tvaru lichoběžníku jsou naskládány tašky do řad tak, že u hřebene je 46 tašek a v každé následující řadě je o jednu tašku více než v předchozí řadě. Kolika taškami je pokryta střecha, pokud nejspodnější řada má 75 tašek?

1h. $a_1 = 46; d = 1; a_n = 75$

$75 = 46 + (n-1) \cdot 1$

$29 = n - 1$

1h. $n = 30$ (počet řad)

$A_{30} = 15(46 + 75) = 15 \cdot 121 = 1815$ 1h.

Střecha je pokryta 1815 taškami.

1h.

5. V geometrické posloupnosti platí $a_1 + a_3 = 300 \wedge a_2 + a_4 = 150$.

- 11h. a) Určete a_1, q, a_6, s_6 .
2h. b) Posloupnost určete vzorcem pro n -tý člen.
2h. c) Posloupnost určete rekurentně.
5h. d) Jaké vlastnosti má daná posloupnost?

ada) $a_1 + a_1 \cdot q^2 = 300$

$a_1 q + a_1 q^3 = 150$

$a_1(1 + q^2) = 300$

$a_1 q(1 + q^2) = 150$

1h. $q = \frac{1}{2}; a_1 = \frac{300}{1 + q^2} = \frac{300}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1200}{5} = 240$ 1h.

1h. $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 240 \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{2}; A_6 = 240 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 - 9 = (-480) \cdot \left[\frac{3}{64} - 1\right] = \frac{945}{2}$ 472,5 1h.

6. Brigádník souhlasil, že bude pracovat, pokud jeho mzda bude za první den 1 Kč, za druhý den 2 Kč, za třetí den 4 Kč atd.. Kolik dní takto pracoval, pokud vydělal 8 191 Kč?

1h. $a_1 = 1; q = 2; 8191 = 2^n - 1 \Rightarrow 8192 = 2^n \Rightarrow 2^{13} = 2^n \Rightarrow n = 13$

Brigádník pracoval 13 dní 1h.

7. Cena nového stroje je 200 000,- Kč. Každoročně se odepisuje 5% ceny stroje z předchozího roku. Určete cenu stroje po 8 letech.

1h. $A_8 = 200\,000 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^8 = 200\,000 \cdot 0,95^8 = 132\,684,08625$ 132 684,09 1h.

po 8 letech bude cena stroje 132 684,- Kč 1h.

8. Pan Starostlivý uložil svému synovi při jeho narození 100 000,- Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou sazbou 2%. Daň z úroku je 15%. Jakou částku bude mít syn k dispozici ve věku 18 let?

1h. $A_{18} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot (1 - \frac{15}{100})\right)^{18} = 100\,000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 0,85)^{18} = 100\,000 \cdot 1,017^8 = 135\,449,4209543$ 135 449,42 1h.

syn pane Starostlivého bude mít v 18 letech k dispozici 135 449,- Kč 1h.