

56. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. V rovině jsou dány dva různé body L , M a kružnice k . Sestrojte trojúhelník ABC co největšího obsahu tak, aby jeho vrchol C ležel na kružnici k , bod L byl středem strany AC a bod M středem strany BC .
2. Nechtě p , q , r jsou přirozená čísla, pro něž platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2007$.
 - a) Určete, jakých hodnot může nabývat součet $p + q + r$.
 - b) Určete počet všech trojic (p, q, r) přirozených čísel, které vyhovují dané rovnici.
3. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB , CD lze vepsat kružnici se středem O . Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC .
4. Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N , z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k -krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N .

Krajské kolo kategorie C se koná

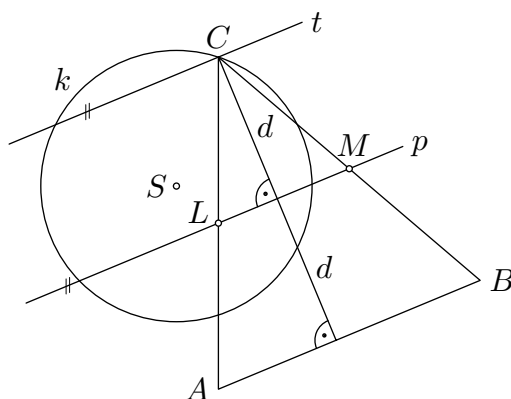
v úterý 27. března 2007

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulatory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

56. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Při rozboru uvažme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem C na kružnici k , jehož strany AC , BC mají středy po řadě v bodech L , M (obr. 1). Protože LM je střední příčkou takového trojúhelníku, je jeho obsah roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku LMC . Tento trojúhelník má pevnou stranu LM , takže jeho obsah je největší, právě když je největší jeho výška z vrcholu C , tedy vzdálenost d bodu C od přímky p určené body L , M .



Obr. 1

Dodejme, že místo srovnání obsahů trojúhelníků ABC a LMC dojdeme ke stejné podmínce také takto: trojúhelník ABC má stranu AB pevné délky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Proto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ roven $2|LM| \cdot d$, takže je největší možný, když je taková vzdálenost d .

Pro který bod $C \in k$ je vzdálenost d největší? Vedme bodem C přímkou t rovnoběžnou s přímkou p . Je-li vzdálenost d největší možná, musí celá kružnice k ležet ve stejné poloovině s hraniční přímkou t jako přímkou p (volbou bodu $C \in k$ uvnitř opačné poloroviny bychom vzdálenost d zvětšili). Přímkou t je proto nutně tečnou kružnice k (rovnoběžnou s danou přímkou p) a bod C je jejím dotykovým bodem.

Odtud již plyne *konstrukce*: bod C určíme jako ten ze dvou průsečíků kružnice k s kolmicí na přímkou p vedenou středem S kružnice k , který má od přímky p větší vzdálenost (mají-li ji oba průsečíky stejnou, vybereme kterýkoliv z nich). Body A , B pak sestrojíme jako obrazy bodu C v souměrnosti podle středu L , resp. M .

Diskuse: Tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou LM mají od této přímky dvě různé vzdálenosti, právě když střed S kružnice k na přímce LM *neleží*; tehdy má úloha jediné řešení. V opačném případě, kdy střed S na přímce LM leží, má úloha dvě řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za nalezení podmínky maximální vzdálenosti C od LM , 2 body za postup konstrukce a 1 bod za správně určené obou možných počtů řešení. Intuitivně jasné určení nejvzdálenějšího bodu kružnice k od přímky LM není nutné zdůvodňovat (třetí odstavec řešení).

2. a) Splňují-li přirozená čísla p , q , r danou rovnicí, dostaneme z ní vyjádření

$$\sqrt{p+q} = \frac{2007 - p - q}{r},$$

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionální, a tedy celé (odmocnina z přirozeného čísla je totiž buď číslo celé, nebo číslo iracionální). Proto z rovností

$$2007 = p + r\sqrt{p+q} + q = (p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}(\sqrt{p+q} + r)$$

dostáváme rozklad čísla 2007 na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q} + r$, pro které zřejmě platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočinitele $2007 = 3^2 \cdot 223$ tudíž vidíme, že jsou možné pouze dva případy, které přehledně zapíšeme do tabulky:

$\sqrt{p+q}$	$\sqrt{p+q} + r$	\iff	$p+q$	r	\implies	$p+q+r$
3	669		9	666		675
9	223		81	214		295

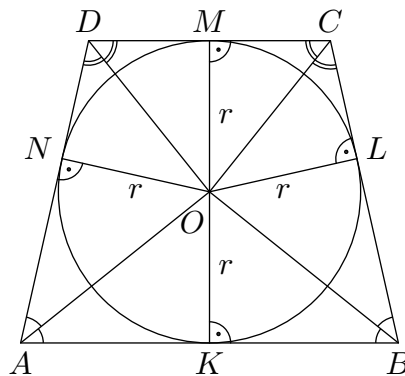
Možné hodnoty součtu $p+q+r$ tedy jsou pouze dvě čísla: 675 a 295. (Konkrétní trojice (p, q, r) , které to prokazují, nebudeme uvádět, protože rovnou určíme v části b) jejich počet.)

b) Rovnost $p+q+r = 675$ nastane, právě když bude trojice (p, q, r) splňovat podmínky $p+q = 9$ a $r = 666$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q) , pro něž $p+q = 9$, tedy 8.

Rovnost $p+q+r = 295$ nastane, právě když bude trojice (p, q, r) splňovat podmínky $p+q = 81$ a $r = 214$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q) , pro něž $p+q = 81$, tedy 80.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za část a) a 1 bod za část b). Za část a) řešení udělte pouze 3 body, chybí-li v jinak úplném postupu zdůvodnění, proč je hodnota $\sqrt{p+q}$ celé číslo.

3. Označme postupně K, L, M, N body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, CD, DA (obr. 2). Protože $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, jeho vnitřní úhly u vrcholů A, B, C, D mají po řadě velikosti $\alpha, \alpha, 180^\circ - \alpha$ a $180^\circ - \alpha$. Úsečky $OA, OB,$



Obr. 2

OC, OD ležící na osách těchto úhlů proto spolu se čtyřmi navzájem shodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdělují celý lichoběžník na osm pravoúhlých trojúhelníků, které se shodují v jedné odvěsně a mají ostré vnitřní úhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Těchto osm trojúhelníků lze tudíž rozdělit do dvou čtveřic shodných trojúhelníků: jednu z nich tvoří trojúhelníky

OAK , OAN , OBK , OBL a druhou trojúhelníky OCL , OCM , ODM a ODN . Odtud plyne, že obsah S lichoběžníku $ABCD$ je roven čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků OBL a OCL , tedy čtyřnásobku obsahu trojúhelníku OBC . Podle vnitřních úhlů u vrcholů B a C vidíme, že trojúhelník OBC je pravoúhlý s odvěsnami OB a OC , takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hledaný celkový obsah S je tudíž $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Malá obměna části předchozího postupu: je-li O střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$, je snadné ukázat, že jeho obsah je roven dvojnásobku součtu obsahů trojúhelníků OAB a OCD stejně jako trojúhelníků OBC a ODA . Poslední dva trojúhelníky jsou u našeho rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ shodné.

Jiné řešení. Pro výšku v a strany a, b, c, d lichoběžníku $ABCD$ s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ platí rovnosti $v = 2r$ a $a + c = b + d$. Z první z nich plyne, že střed O leží na střední příčce lichoběžníku, jejíž délka $\frac{1}{2}(a + c)$ je podle druhé rovnosti rovna $\frac{1}{2}(b + d)$. V našem případě ovšem platí $b = d$, takže střední příčka je shodná s oběma rameny a bod O je jejím středem, neboť rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný. Dohromady dostáváme, že bod O leží na kružnici sestavené nad průměrem BC , a proto je OBC pravoúhlý trojúhelník o obsahu $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na přeponu BC je však poloměrem r vepsané kružnice k , tudíž obsah trojúhelníku OBC je rovněž roven $\frac{1}{2}b \cdot r$. Porovnáním obou vyjádření dostaneme rovnost $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pro hledaný obsah S našeho lichoběžníku proto platí

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho při prvním postupu 3 body za zdůvodnění, že daný lichoběžník je složen ze dvou čtveřic shodných trojúhelníků, nebo za rovnost typu $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$. Za hlubší poznatek $S = 4 \cdot S_{OBC}$ už udělte 4 body. 1 bodem oceňte zjištění, že OBC je pravoúhlý trojúhelník, stejně jako postup, kdy řešitel pouze rozdělí daný lichoběžník na čtyři dvojice shodných trojúhelníků a dalšího pokroku v úvahách o jejich obsahu nedosáhne.

4. Libovolné $(m + 1)$ -místné přirozené číslo N s první číslicí c má vyjádření $N = c \cdot 10^m + x$, kde x je právě to číslo, které dostaneme z čísla N po škrtnutí první číslice c . Podle zadání má platit $N = c \cdot 10^m + x = kx$ neboli $c \cdot 10^m = (k - 1)x$. Číslo $k - 1$ tedy musí být dělitelem čísla $c \cdot 10^m$, které má ovšem pouze jednociferné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c . Budeme proto postupně testovat na prvočinitele čísla $k - 1$ pro největší dvojmístná k :

- ▷ $k = 99$: $k - 1 = 98 = 2 \cdot 7^2$ nevyhovuje, neboť $7^2 \nmid c \cdot 10^m$.
- ▷ $k = 98$: $k - 1 = 97$ nevyhovuje, neboť 97 je dvojmístné prvočíslo.
- ▷ $k = 97$: $k - 1 = 96 = 2^5 \cdot 3$ vyhovuje, neboť například $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ pro $c = 3$ a $m = 5$; abychom dostali menší N , můžeme ovšem zvolit menší $m = 4$ a $c = 3 \cdot 2 = 6$ (jiné c pro $m = 4$ nevyhovuje). Pro $m \leq 3$ už vztah $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ neplatí pro žádnou nenulovou číslici c .

Hledané největší dvojmístné k je tedy 97. Podle předchozí diskuse určíme nejmenší vyhovující N , kterému odpovídá $m = 4$, $c = 6$ a $x = 6 \cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60\,625$.

Odpověď: Hledané k je rovno 97 a nejmenší vyhovující N je 60 625.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za obecné zjištění, že číslo $k - 1$ musí být dělitelem součinu nenulové číslice a mocniny čísla 10. Za úplné je třeba považovat i řešení, kdy jsou vyloučeny hodnoty $k = 99$, $k = 98$ oddělenými postupy a pro hodnotu $k = 97$ je určeno (nikoliv uhodnuto) nejmenší vyhovující N . Při jinak úplném řešení, kdy je pro $k = 97$ uvedeno sice vyhovující, nikoliv však nejmenší možné N (například $N = 303\,125$), udělte 5 bodů.