

## Maturitní okruhy z matematiky pro školní rok 2005-2006

Třída 8.A/8, 4.A/4

V.Zlatohlávek, B. Naxer

1. Úpravy výrazů v matematice .....	2
2. Rovnice a nerovnice .....	4
3. Soustavy rovnic a nerovnic.....	6
4. Geometrická zobrazení.....	8
5. Použití metody substituce .....	10
6. Absolutní hodnota .....	11
7. Kvadratická rovnice a funkce .....	13
8. Matematické důkazy .....	15
9. Konstrukční úlohy .....	16
10. Goniometrické vztahy, trigonometrie .....	17
11. Inverzní a složená funkce .....	18
12. Vzájemné polohy útvarů.....	19
13. Vzdálenosti .....	21
14. Odchytky.....	22
15. Obvody, obsahy, objemy a povrchy.....	23
16. Kružnice a elipsa .....	24
17. Hyperbola .....	25
18. Parabola .....	26
19. Posloupnost, aritmetická posloupnost.....	27
20. Geometrická posloupnost, nekonečná geometrická řada.....	28
21. Variace, kombinace a permutace bez opakování, kombinační čísla .....	30
22. Variace, kombinace a permutace s opakováním, binomická věta.....	32
23. Pravděpodobnost, statistika .....	33
24. Funkce a její limita, derivace funkce .....	34
25. Průběh funkce .....	36
26. Primitivní funkce, výpočty integrálů .....	37
27. Určitý integrál a jeho použití .....	38

# 1. Úpravy výrazů v matematice

1. Jaké úpravy výrazů se v matematice nejčastěji používají?

2. Upravte: a)  $\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 25} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$

b)  $\left( \frac{a}{b^2 + ab} - \frac{2}{a + b} + \frac{b}{a^2 + ab} \right) : \left( \frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b} \right)$

c)  $\frac{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}$

3. Rozhodněte v jaké části množiny  $R$  platí rovnosti:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \sqrt{x^2} = x, \sqrt{x^2} = -x, (\sqrt{x})^2 = x$$

4. Je dán zlomek:  $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

a) Pro která  $x \in R$  má zlomek smysl?

b) Pro která  $x \in R$  je zlomek roven nule?

c) Pro která  $x \in R$  nabývá kladných hodnot?

5. Upravte:  $\frac{(x^2 - 3x + 2)(x + 2)}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

6. Dokažte, že pro všechna  $x \in R, y \in R$ , platí:  $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

7. Vysvětlete pojmy - usměrňování zlomků, částečné odmocňování

8. Upravte: a)  $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

b)  $\left[ \left( \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} \right)^{\frac{1}{4}} : \left( \frac{2a^{-1}}{\sqrt[4]{2a^4}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[ \frac{3\sqrt[4]{a^5} (6a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{27}} \right]^{-1}$

c)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d)  $a^{-1} \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + a^2)^{\frac{1}{2}}$

9. Vypočítejte: a)  $\sqrt{15}(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 1)^2 + (1 + \sqrt{5})^2$

b)  $\frac{\left( 10^{\frac{1}{3}} 8^{-\frac{1}{2}} \right)^{-3}}{\left( 5^{\frac{1}{4}} 4^{\frac{1}{8}} \right)^2} : \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}}$

c)  $\left( \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right)^2$

10. Upravte: a)  $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$       b)  $\frac{1 + \cot^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$       c)  $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$

11. Řešte graficky:

a)  $x + |x| = y + |y|$

b)  $x^2 + y^2 > 9 \wedge |x| + |y| < 5$

c)  $\log_2(x+4) - y + 3 \geq 0 \wedge |x| - y \leq 0 \wedge x - y + 5 > 0$

12. Vypočítejte (v algebraickém tvaru):

a)  $(-2 + 3i)^2 i^5 + \frac{13 - 26i}{3 + 2i} - (1 - i)(1 + i)$

b)  $(-3 - 2i)i^3 - \frac{10 - 2i}{-3 + i} + (-1 - i)^2$

13. Upravte: a)  $\frac{(n+2)!}{n!} - 2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$

b)  $\frac{n!}{(n-2)!} - 2 \binom{n}{2}$

14. Vypočítejte: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1}$

## 2. Rovnice a nerovnice

1. Řešte v  $R$ : a)  $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-2}$  b)  $\frac{\frac{x}{3} - \frac{x-1}{4}}{\frac{x}{3} - \frac{x+1}{4}} = x$

c)  $\frac{1-3x}{x+4} < 2$

d)  $\frac{x^2+x}{x^2+1} \leq 1$

e)  $\frac{x^2-4x-5}{x^2-9} \geq 1$

f)  $\frac{5-x}{2x-2} + \frac{1+4x}{2x+2} < 1$

2. Řešte v  $R$ : a)  $|2x-7| + |x-2| = 3$

b)  $|3x-2| + 4 = |2x+3|$

c)  $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$

d)  $|3x-2| - 5 \leq x+1$

e)  $|3x-2| < 5 + |x+1|$

3. Řešte v  $R$ : a)  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

b)  $x^2 - 0,2x + 0,01 \leq 0$

c)  $-4(3-x)^2 \leq 11x - 33$

4. Určete reálnou hodnotu parametru  $m$  tak, aby rovnice s neznámou  $x \in R$  měla:

a) kladný kořen  $6m - mx + 2x = 15$

b) reálné kořeny A)  $2mx^2 + mx + 1 = 0$  B)  $2x^2 + 4mx - m = 0$  C)  $x^2 + mx + 9 = 0$

c) reálné různé kořeny A)  $2x^2 + mx + 2 = 0$  B)  $x^2 - mx + 1 - 2m^2 = 0$

d) jeden kořen roven nule  $x^2 + 3x - 2m^2 + m + 3 = 0$

5. Řešte v  $R$  rovnici s reálným parametrem  $p$ :  $x - \frac{2}{p^3} = \frac{1}{p^2}(4x+1)$

6. Řešte v  $R$ :

a)  $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$  b)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$  c)  $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}} = x+1$

7. Určete definiční obory funkcí:

a)  $y = \log(x^2 - 10) + \sqrt{x^2 - 5x}$

b)  $y = \log \sqrt{(x^2 + 3x) : (x-5)} + \frac{x+1}{x-10}$

8. Řešte v  $R$  :

$$a) \left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2} \quad b) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$$

$$c) 2^{x+7} \sqrt[4]{4^{13-x}} = 1024 \quad d) 2^x = 3^x$$

9. Řešte v  $R$  :

$$a) \log(x^3 + 1) - \log 7 - \log x = \log(x+1) - \log 6 \quad b) \log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \dots = 2$$

$$c) \frac{5 \log x + 3}{3 \log x - 4} = \frac{\log x + 5}{3 \log x - 4} - 2 \quad d) \log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$$

$$e) \frac{\log x - 1/4}{1 - \log x} = \frac{1}{2} \quad f) x^{\log x} = 10^{1/4} \quad g) \log_2 x < 4$$

10. Řešte v  $R$  :

$$a) \sin x = 0 \quad b) \sin x = -1 \quad c) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad d) \operatorname{tg} x = -1 \quad e) \operatorname{cotg} x = 1$$

$$f) \sin x \cos x = 0$$

$$11. \text{Řešte graficky nerovnice: } a) \sin x \geq \frac{1}{2} \quad b) \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad c) \operatorname{tg} x < 1$$

12. Řešte v  $R$  :

$$a) \sin(2x - p/4) = -0,5 \quad b) \operatorname{cotg}(3x - p/6) = 1 \quad c) \sin^2 x = \sqrt{3} \sin x \quad d) \sin 2x = \cos x$$

13. Řešte v  $C$  :

$$a) x^2 + 4x + 5 = 0 \quad b) x^2 - 6ix - 8 = 0 \quad c) x^2 - 2(1+i)x + 2i = 0$$

14. Řešte v  $C$  :

$$a) x^4 = 81 \quad b) x^3 = -8 \quad c) x^5 = 2 + 2i$$

Jak se tyto rovnice nazývají?

### 3. Soustavy rovnic a nerovnic

1. Řešte početně i graficky soustavu lineárních rovnic v  $R^2$ .

a) 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$
      c) 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

2. V  $R^3$  řešte soustavy rovnic – použijte metodu GEM (Gaussova eliminační metoda) a JEM (Jordanova eliminační metoda):

a) 
$$\begin{cases} 3x + y - z = 7 \\ x + 2y - 5z = 15 \\ 3x + 5y + 2z = 9 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Jaký je geometrický význam této úlohy ?

3. Řešte v  $R^2$  soustavu rovnic s parametrem  $b$ : 
$$\begin{cases} x + (b-1)y = 1 \\ (b+1)x + 3y = -1 \end{cases}$$

4. Pro které reálné hodnoty parametru  $b$  má v  $R^2$  soustava rovnic 
$$\begin{cases} bx - 2y = 3 \\ 3x + by = 4 \end{cases}$$
 řešení  $[x, y]$ , kde  $x > 0 \wedge y < 0$  ?

5. Určete všechny kvadratické funkce, jejichž grafy procházejí body:  $[-4, -57]$ ,  $[2, 9]$ ,  $[5, -12]$

6. Řešte početně i graficky:  $x + 2y = 9 \wedge 2x - y \leq 8$

7. Řešte graficky i výpočtem soustavy rovnic: a) 
$$\begin{cases} x^2 = y \\ y - 5 = 0 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ y - 2x = 8 \end{cases}$$

8. Řešte graficky soustavy nerovnic:

a) 
$$\begin{cases} x - 4y \leq 12 \\ 3x + y \geq 6 \\ x - y \geq 5 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} 2x + y < 5 \\ x^2 + y^2 \leq 10 \end{cases}$$
      c) 
$$\begin{cases} x^2 - y + 1 < 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$
      d) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ |x| + |y| \leq 5 \end{cases}$$

9. Řešte v  $R$  soustavu nerovnic:

a) 
$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq 2 \wedge 3x - x^2 < 0$$

10. V pravoúhlém trojúhelníku je součet délek stran  $132\text{cm}$ , součet obsahů čtverců nad jeho stranami je  $6050\text{cm}^2$ . Jak dlouhé jsou strany trojúhelníku ?

11. Řešte v  $R^2$  soustavy rovnic:

a) 
$$\begin{cases} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} = \sqrt{54} \end{cases}$$
      c) 
$$\begin{cases} x^{y+1} = 125 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{y-1} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

12. Řešte v  $\langle 0, 2\pi \rangle$  soustavu nerovnic: a) 
$$\begin{cases} \cotg x < \sqrt{3}/3 \\ \sin x \geq -1/2 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} \tg x \geq -1 \\ \cos x < \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

13. V  $\left\langle \frac{p}{2}, \frac{3p}{2} \right\rangle$  řešte soustavu rovnic:  $16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4 \wedge 2^{\sin x + \cos y} = 1$

14. Rozdíl dvou přirozených čísel je 128, rozdíl jejich aritmetického a geometrického průměru je 16. Určete tato čísla.

## 4. Geometrická zobrazení

1. Vysvětlete pojmy:

- geometrické zobrazení
- shodné zobrazení
- podobné zobrazení
- samodružný bod, samodružný objekt

2. Jaká znáte shodná zobrazení v rovině?

Každé z nich charakterizujte - čím je určeno, jakým způsobem zobrazíme bod, jaké útvary jsou samodružné.

3. Je dán trojúhelník  $ABC$ ,  $a = 7\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$ ,  $c = 5\text{cm}$ ,  $T$  je jeho těžiště. Sestrojte jeho obraz v zobrazení

- a)  $S(T) \circ R(B, +120^\circ)$       b)  $S(\leftrightarrow BC) \circ T(AC)$       c)  $S(\leftrightarrow TA) \circ R(B, -60^\circ)$

4. Určete všechny osy a středy souměrnosti útvarů: čtverec, obdélník, kosočtverec, rovnoběžník, trojúhelník - rovnostranný, rovnoramenný, obecný, kruh.

5. Je dán ostrý úhel  $AVB$ , bod  $S$  leží mezi rameny  $\rightarrow VA$ ,  $\rightarrow VB$ . Sestrojte úsečku  $XY$  se středem  $S$ , bod  $X \in \rightarrow VA$ , bod  $Y \in \rightarrow VB$ .

6. Je dán bod  $S$ , kružnice  $k$ , přímka  $p$ . Sestrojte čtverec  $ABCD$  se středem  $S$ , vrchol  $A \in k$ , vrchol  $C \in p$ .

7. Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:  $t_a = 5\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$ ,  $c = 5,5\text{cm}$ .

8. Jsou dány kružnice  $k, l$ ,  $k \cap l = \{ \}$ , přímka  $p$  ležící mezi nimi, úsečka  $KL$ . Sestrojte kosočtverec  $ABCD$  tak, že vrchol  $A \in k$ , vrchol  $C \in l$ , úhlopříčka  $BD \subset p$  a platí:  $|BD| = |KL|$ .

9. Je dána přímka  $p$ , body  $A, B$  ležící ve stejné polorovině určené přímkou  $p$ . Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , bod  $C \in p$ , tak, aby měl minimální obvod.

10. Jsou dány soustředné kružnice  $k, l$ , bod  $A \in k$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník  $ABC$ , vrchol  $B \in k$ , vrchol  $C \in l$ .

11. Jsou dány rovnoběžné přímky  $b, d$ , bod  $A$  ležící mezi nimi. Sestrojte čtverec  $ABCD$ , vrchol  $B \in b$ , vrchol  $D \in d$ .

12. Jsou dány různoběžné přímky  $a, b$ , úsečka  $KL$ . Sestrojte úsečku  $AB$ , bod  $A \in a$ , bod  $B \in b$ ,  $AB \parallel KL$ ,  $|AB| = |KL|$ .

13. Charakterizujte stejnost - čím je určena, jakým způsobem zobrazíme bod, úsečku.

14. Je dán trojúhelník  $ABC$ ,  $a = 7\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$ ,  $c = 5\text{cm}$ . Sestrojte jeho obraz - trojúhelník  $KLM$  v zobrazení

$$H\left(B, -\frac{1}{2}\right) \circ H(A, +2). \text{ Jaký je vztah mezi trojúhelníky } ABC, KLM ?$$



15. Je dána kružnice  $k$ , její vnější bod  $Q$ . Bodem  $Q$  ved'te sečnu  $s$  ke kružnici  $k$  tak, aby platilo:  $|QB| = 3 \cdot |QA|$ , kde  $s \cap k = \{A, B\}$ .

16. Je dán čtverec  $ABCD$ , jeho vnitřní bod  $K$ . Sestrojte úsečku  $XY$ , body  $X, Y$  leží na obvodu čtverce  $ABCD$  a platí:  $|KX| = 2 \cdot |KY|$ .

17. Jsou dány různoběžné přímky  $a, b$ , bod  $M \notin a \wedge M \notin b$ . Sestrojte kružnici  $k$ , bod  $M \in k$ ,  $k$  se dotýká přímek  $a, b$ .

18. Je dán rovnoramenný trojúhelník  $ABC$  s rameny  $AC, BC$ . Vepište do něj čtverec  $KLMN$ , strana  $KL \subset AB$ , vrchol  $M \in BC$ , vrchol  $N \in AC$ .

## 5. Použití metody substituce

1. Řešte v  $R$  rovnice: a)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$  b)  $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$

2. Řešte v  $R$  rovnici:  $2\sqrt{8x^2 - 26x + 16} - 1 = \frac{5 - 4\sqrt{8x^2 - 26x + 16}}{\sqrt{8x^2 - 26x + 16}}$

3. Řešte v  $R^3$  zavedením nových neznámých:  $\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \quad \wedge \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 4 \quad \wedge \quad \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 0$

4. Řešte v  $R$ : a)  $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$  b)  $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$

c)  $5 \cdot \sqrt[3]{64} - 6 \cdot \sqrt[2]{64} = 8$

5. Řešte v  $R$ : a)  $\log x + \frac{1}{\log x} = 2$  b)  $1 + \log x^3 = \frac{10}{\log x}$

c)  $\frac{1}{1 + \log x} + \frac{5}{3 - \log x} = 3$  d)  $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$

6. Řešte v  $R^2$  soustavu rovnic:  $2^x + 3^y = 11 \quad \wedge \quad 4^x + 5 \cdot 9^y = 109$

7. Řešte v  $R$ : a)  $\sin\left(2x - \frac{p}{4}\right) = -\frac{1}{2}$  b)  $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c)  $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$  d)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x - 2/\sqrt{3} = 0$

8. Řešte v  $N$ :

a)  $(n!)^2 - 7n! + 6 = 0$

b)  $\binom{n}{k}^2 - 2\binom{n}{k} - 3 = 0$

9. Vypočítejte: a)  $\int 10x(x^2 + 13) dx$

b)  $\int 2 \sin x \cos^3 x dx$

c)  $\int 5x^2 e^{-x^3} dx$

d)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

e)  $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$

f)  $\int \cos^5 x dx$

## 6. Absolutní hodnota

1. Jak je definována absolutní hodnota reálného čísla  $a$ ? Jaký je její geometrický význam?

2. Řešte z paměti,  $x \in R$ : a)  $|x| = 3$                       b)  $|x| < 3$                       c)  $|x| \geq 3$

d)  $|x - 2| \geq 1$                       e)  $|x + 1| < 2$

3. Dokažte vztahy pro  $a \in R, b \in R$ : a)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$                       b)  $\frac{|a|}{|b|} = \frac{a}{b}$

c) Jaký je vztah mezi výrazy:  $|a| + |b|$  ???  $|a + b|$

4. Sestrojte grafy funkcí: a)  $y = |x| - 3$                       b)  $y = -|x| + 2$

c)  $y = |x + 1| - |1 - x|$                       d)  $y = \frac{|x| + x}{x}$

e)  $y = \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x + 3}$                       f)  $y = x^2 - x|x - 2| - 4$

g)  $y = |x| \cdot \sqrt{\frac{9 - x^2}{x^2 - 9}}$                       h)  $y = |x^{-1}|$

i)  $y = |2 \sin x|$                       j)  $y = |\log x|$

k)  $y = \log|x|$

5. Řešte v  $R$ : a)  $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0$                       b)  $|2x + 1| - |2x| + 1 = 2x$

c)  $3x - |2x - 1| = x + 1$                       d)  $|2x - 3| \geq |3x - 2|$

e)  $|6x^2 - 5x| < 6$                       f)  $|2x + 1| - |3 - x| < x$

g)  $\left| \frac{2x}{1 + x^2} \right| \leq 1$

6. Řešte graficky:  $x + |x| = y + |y|$

7. Jak je definována absolutní hodnota komplexního čísla? Jaký je její geometrický význam?

8. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexního čísla:  $z = \frac{1 - 3i}{2 + i} + \frac{1 + 3i}{2 - i}$

9. Řešte v  $C$  algebraicky:  $|z| - z = 1 + 2i$

10. Řešte v  $C$  graficky: a)  $|z - 1| = 3 \wedge |z - i| \geq 2$  b)  $2 < |z - 1 + 2i| < 3$

c)  $|z + 1 - 2i| < 3 \wedge |z + 2 - 2i| > |z|$

## 7. Kvadratická rovnice a funkce

1. Jaký je obecný zápis kvadratické rovnice?

Vysvětlete pojmy: ryze kvadratická rovnice  
kvadratická rovnice bez absolutního členu  
normovaná kvadratická rovnice

2. Řešte v množině  $R$ , v množině  $C$ :

a)  $x^2 - 7x + 6 = 0$     b)  $x^2 - 4x + 4 = 0$     c)  $2x^2 + 3x - 2 = 0$     d)  $3x^2 - 7x = 0$   
e)  $3x^2 - 27 = 0$     f)  $x^2 - 2x + 5 = 0$

3. Řešte v množině  $C$ : a)  $x^2 - 6ix - 8 = 0$     b)  $x^2 - 2(1+i)x + 2i = 0$   
c)  $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$

4. Ze stanice se má vypravit 11 vlaků, z nichž každý má 35 vagónů. Aby se ušetřilo několik lokomotiv, zmenšili počet vlaků tím, že ke každému vlaku přidali tolikrát po 5 vagónech, kolik lokomotiv ušetřili. Tak byly opět vypraveny všechny vagóny. Kolik lokomotiv se ušetřilo, kolik vagónů měl každý vlak?

5. Pozemek obdélníkového tvaru o rozměrech 44 metrů a 24 metrů je rozdělen dvěma navzájem kolmými stejně širokými cestami rovnoběžnými se stranami pozemku. Zbývající část pozemku je zahrada, jejíž obsah se rovná  $\frac{7}{8}$  celého pozemku. Jak široké jsou cesty?

6. Uveďte Vietovy vzorce - vztahy mezi kořeny a koeficienty (normované) kvadratické rovnice.

7. Vysvětlete rozklad kvadratického trojčlenu  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) na součin kořenových činitelů.

8. Určete všechny kvadratické rovnice, a) jejichž kořeny jsou čísla 3 a -5  
b) jejichž dvojnásobným kořenem je číslo  $\frac{2}{5}$

9. Zapište všechny kvadratické rovnice, které mají kořeny a) čtyřikrát větší  
b) o čtyři větší

než jsou kořeny rovnice  $x^2 - 9x + 15 = 0$  (pomocí Vietových vzorců – bez řešení původní rovnice).

10. Určete, pro která reálná čísla  $p$  platí, že součet druhých mocnin kořenů rovnice  $x^2 + px + 24 = 0$  je roven 96.

11. Řešte v  $R$  rovnice:

a)  $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-1}{x-5} = 4$     b)  $\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-x}$     c)  $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$

d)  $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}} = x+1$

12. Sestrojte grafy funkcí v závislosti na parametru  $a$ :

a)  $y = ax^2$     b)  $y = x^2 + a$     c)  $y = (x+a)^2$

13. Sestrojte grafy funkcí a určete jejich vlastnosti:  $D(f)$ ,  $H(f)$ ,  $P_x$ ,  $P_y$ , monotónnost, omezenost, sudost, lichost.

a)  $y = x^2 - 2x - 2$

b)  $y = -x^2 + 2x + 2$

c)  $y = |x^2 - 2x - 2|$

14. Určete  $D(f)$ :

a)  $y = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}}$

b)  $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

15. Na oplocení pozemku obdélníkového tvaru máme k dispozici  $100m$  pletiva. Určete jeho rozměry tak, aby výměra byla co největší.

## 8. Matematické důkazy

1. Co je to výrok?

2. Vysvětlete pojem „tautologie“ výrokové logiky. Dokažte, že jde o tautologie:

$$\text{a, } \neg[A \wedge B] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)] \quad \text{b, } [A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow \vee(\neg A)]$$

Vysvětlete termíny: obrácení implikace, obměna implikace.

3. Formulujte negace výroků:

Přímka prochází nejvýše pěti body.

Rovnice má alespoň dvě řešení.

Každé přirozené číslo je kladné.

Posloupnost  $a_n$  je rostoucí  $\Rightarrow$  pro  $\forall n \in N$  platí:  $a_n < a_{n+1}$

4. Jaké znáte typy důkazů v matematice? Stručně charakterizujte.

5. Vyjmenujte znaky dělitelnosti dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, šesti, devíti, deseti.

Dokažte: Pro  $\forall n \in N$  platí:

$$\text{a) } 3 \mid n \Rightarrow 6 \mid (n^2 - n) \quad \text{b) } 5 \mid n^2 \Rightarrow 5 \mid n$$

$$\text{c) } 6 \mid (n^3 - n)$$

6. Vysvětlete rozdíl mezi racionálním a iracionálním číslem. Dokažte sporem:  $\sqrt{2}$  není racionální číslo.

7. Dokažte matematickou indukcí:

Pro  $\forall n \in N$  platí:

$$\text{a) } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{b) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

8. Dokažte matematickou indukcí: Pro  $\forall n \in N$  platí:  $6 \mid n^3 + 11n$

9. Dokažte sporem: Každým bodem roviny lze vést k dané přímce nejvýše jednu kolmici.

10. Dokažte geometricky vztah:  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

11. Dokažte geometricky: Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180 stupňů.

12. Dokažte: Lineární funkce  $y = ax + b$  je pro  $a > 0$  rostoucí, pro  $a < 0$  klesající.

13. Dokažte, že pro každá dvě čísla  $a \in R, b \in R, a > 0, b > 0$  platí vztahy:

$$\text{a) } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \quad \text{b) } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

14. Dokažte podle definice derivace:  $y = x^2 \Rightarrow \forall x_0 \in R : y'(x_0) = 2x_0$ .

## 9. Konstrukční úlohy

1. Sestrojte množinu všech bodů v rovině, z nichž je vidět úsečku  $AB$ ,  $|AB| = 5\text{cm}$ , pod úhlem:

a)  $90^\circ$       b)  $30^\circ$       c)  $120^\circ$

2. Je dána kružnice  $k(S, 4\text{cm})$ , bod  $A$ ,  $|AS| = 7\text{cm}$ . Bodem  $A$  veďte všechny přímky, na nichž kružnice  $k$  vytíná tětivy o délce  $3\text{cm}$ .

3. Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $c, v_b, t_b$       b)  $b, c, t_a$       c)  $a, v_a, a$       d)  $c, v_b, v_a$       e)  $b, t_b, t_a$

4. Sestrojte kosočtverec  $ABCD$ , je-li dáno:  $v, e$

5. Sestrojte rovnoběžník  $ABCD$ , je-li dáno:  $a, a, e$

6. Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , je-li dáno:  $b, c, a, f$

7. Jsou dány soustředné kružnice  $k(O, r_1), l(O, r_2), r_1 > r_2$ , přímka  $p$ , která je sečnou kružnic  $k, l$ . Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky  $p$ , kružnice  $k$  k uvnitř, kružnice  $l$  vně.

8. Je dána kružnice  $k(O, r)$ , bod  $A \in k$ , bod  $B$  ležící vně kružnice  $k$ . Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká kružnice  $k$  v bodě  $A$ , bod  $B \in l$ .

9. Jakými způsoby lze sestavit úsečku délky  $\sqrt{5}$  ?

10. Jsou dány úsečky délek  $a, b$  ( $a > b$ ). Sestrojte úsečku délky:

a)  $\sqrt{a^2 + b^2}$       b)  $\sqrt{a^2 - b^2}$       c)  $\frac{a^2}{b}$       d)  $\frac{ab}{a+b}$

11. Obdélník má strany o délkách  $a, b$ . Sestrojte čtverec o stejném obsahu.



## 10. Goniometrické vztahy, trigonometrie

1. Pomocí jednotkové kružnice ukažte zavedení funkcí:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{cotg} x$ .  
Odvoďte základní vztah  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

2. Vypočítejte z paměti: a)  $a^2 \cdot \sin p/2 + b^2 \cdot \cos 0 + 2ab \cdot \cos p$   
b)  $3 \cos p/2 - 4 \sin 3/2p + 8 \operatorname{tg} p$   
c)  $2 \cos p + 6 \operatorname{cotg} 3/2p - 5 \sin 2p$

3. Vypočítejte: a)  $\sin \frac{11}{3}p + \cos \frac{13}{4}p + \operatorname{tg} \frac{10}{3}p$   
b)  $\sin(-600^\circ) - \cos(-1410^\circ) - \operatorname{tg}(-540^\circ) - \operatorname{cotg}(-405^\circ)$

4. Vypočítejte hodnoty  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{cotg} x$ , jestliže je dáno:

$$\text{a) } \sin x = -0,6 \quad x \in \left( \frac{3}{2}p, 2p \right) \quad \text{b) } \operatorname{cotg} x = 4 \quad x \in \left( p, \frac{3}{2}p \right)$$

5. Upravte výrazy a určete podmínky:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} & \text{b) } 1 - \sin^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \sin^2 x & \text{c) } \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x} \\ \text{d) } \frac{\operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg}^2 z} & \text{e) } \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 & \text{f) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} \end{array}$$

6. Dokažte, že platí: a)  $\sin^2 x(1 + \operatorname{cotg} x) + \cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) = 1 + \sin 2x$

$$\text{b) } \frac{\cos 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

7. Dokažte, že platí vztah pro obsah trojúhelníku  $ABC$ :  $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin a$ .

8. Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ , jestliže platí  $a : b = 2 : 3$ ,  $a : b = 1 : 2$ .

9. Určete velikost úhlu  $g$  v trojúhelníku  $ABC$ , jestliže platí:

$$\text{a) } c^2 = a^2 + b^2 + ab \quad \text{b) } c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

10. Silnice, vedoucí po hrázi rybníka, má být po zrušení rybníka nahrazena přímou cestou. Její krajní body  $A, B$  jsou zaměřeny z bodu  $C$  pod úhlem  $g = 60^\circ$ ,  $a = |AC| = 421m$ ,  $b = |BC| = 233m$ . Jak dlouhá bude nová cesta?

11. Na vrcholu kopce stojí rozhledna vysoká  $v = 25m$ . Její patu vidíme z údolí ve výškovém úhlu  $a = 29^\circ$ , vrchol ve výškovém úhlu  $b = 32^\circ$ . Jak vysoko je vrchol kopce nad pozorovacím místem?

12. Z věže vysoké  $v = 10\sqrt{3}m$  a vzdálené od řeky  $a = 10m$  se jevila šířka řeky v zorném úhlu  $a = 15^\circ$ . Určete šířku řeky v tomto místě.

## 11. Inverzní a složená funkce

1. Vysvětlete, kdy je funkce prostá ve svém definičním oboru. Ukažte, zda jsou prosté funkce:

- a)  $y = c$  (*konst.*)                      b)  $y = x$                       c)  $y = 2x - 1$                       d)  $y = x^2$   
e)  $y = e^x$                       f)  $y = \ln x$

2. Vysvětlete pojem rovnosti funkcí. Rozhodněte, zda jsou si rovny dané funkce  $f, g$ :

- a,  $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$       b,  $f(x) = x, g(x) = x^2 \cdot x^{-1}$   
c,  $f(x) = \sin x, g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$

3. Vysvětlete pojem inverzní funkce. Jakou vlastnost musí mít funkce  $f$ , aby k ní existovala funkce inverzní  $f^{-1}$ ? Jaké jsou vztahy mezi množinami  $D(f), H(f), D(f^{-1}), H(f^{-1})$ ? Jaký je vztah mezi grafy funkcí  $f, f^{-1}$ ?

4. Napište rovnici a určete  $D(f), H(f), D(f^{-1}), H(f^{-1})$  inverzní funkce  $f^{-1}$  (relace) k funkci  $f$ :

- a)  $f : y = 2x - 1$                       b)  $f : y = \frac{2x-1}{x}$                       c)  $f : y = x^2 - 1$                       d)  $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$   
e)  $f : y = \log_2 x$                       f)  $f : y = \sin x$

5. Do stejné soustavy souřadné načrtněte grafy následujících funkcí:

- a)  $y = x^2, y = \sqrt{x}$                       b)  $y = x^3, \sqrt[3]{x}$                       c)  $y = x - 1, y = x + 1$

6. Určete pro které reálné hodnoty parametru  $a$  jsou funkce  $f : y = \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^x$        $g : y = \log_{\frac{a+1}{a}} x$

- a) rostoucí                      b) klesající

7. Určete, z kterých funkcí jsou složeny následující funkce a derivujte je:

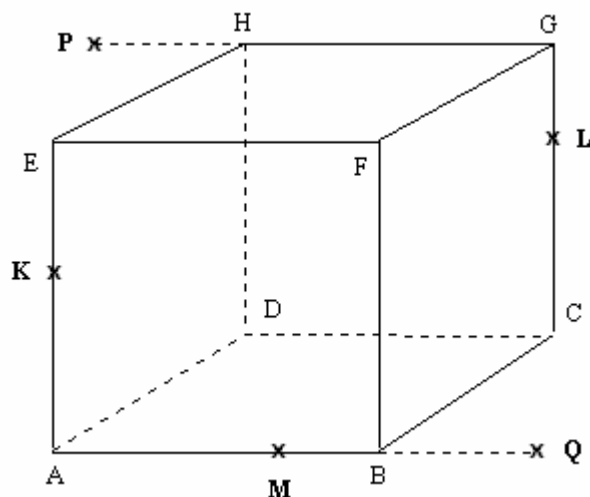
- a)  $y = (x^2 + 2x + 2)^3$                       b)  $y = 3 \cos^2 x + \sin x^2$                       c)  $y = \sqrt[3]{4 + 3x^2}$   
d)  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$                       e)  $y = \ln(\ln(\ln x))$

8. Vypočítejte integrály:

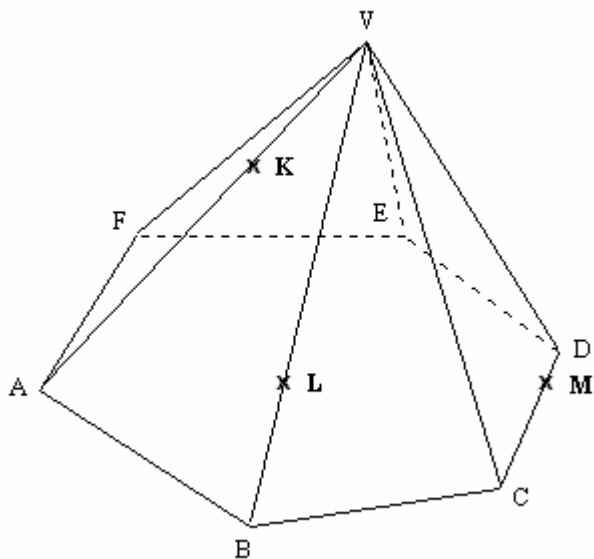
- a)  $\int \sqrt{4x-1} dx$                       b)  $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx$                       c)  $\int \sin(ax-b) dx$   
d)  $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$                       e)  $\int e^{2x-1} dx$

## 12. Vzájemné polohy útvarů

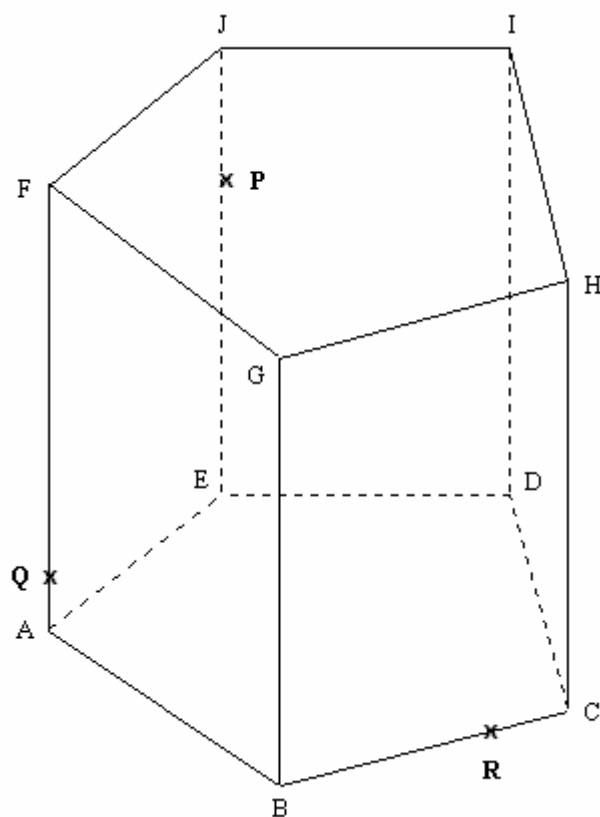
- Zjistěte, zda dané body leží v jedné přímce:
  - $A[-3,2]$ ,  $B[-7,-4]$ ,  $C[-1,5]$
  - $A[7,-1,3]$ ,  $B[5,2,2]$ ,  $C[1,8,1]$
- Zjistěte, zda leží dané body v jedné rovině:
  - $A[1,-2,3]$ ,  $B[1,-2,4]$ ,  $C[3,-1,4]$ ,  $D[2,-1,4]$
  - $A[1,-2,3]$ ,  $B[2,1,8]$ ,  $C[2,1,1]$ ,  $D[-2,-11,9]$
- Určete vzájemnou polohu přímek  $p, q$ :
  - $p: A[3,-1]$ , směrový vektor  $\vec{a}(-2,1)$   
 $q: B[4,-2]$ , směrový vektor  $\vec{b}(1,-2)$
  - $p: A[1,0,-1]$ ,  $B[2,1,1]$ ,  $q: C[1,2,-2]$ ,  $D[0,-1,2]$
- Určete reálné číslo  $a$  tak, aby přímka  $p: x = 5 - 6t$ ,  $y = a + 2t$ ,  $t \in R$  procházela průsečíkem přímek  $r, s$ , kde  $r: x = 2 - u$ ,  $y = 1 + 2u$ ,  $u \in R$ ,  $s: x = -1 + 3v$ ,  $y = -1 - 2v$ ,  $v \in R$ .
- Ukažte, že přímka  $AB: A[3,-2,-1]$ ,  $B[4,1,3]$ , je různoběžná s rovinou  $a: 2x - 3y + z - 2 = 0$ . Určete jejich průsečík.
- Zjistěte vzájemnou polohu roviny, která má obecnou rovnici  $x + 2y - z + 4 = 0$  a přímky, která je průsečnicí rovin  $a: 2x - y - 3z + 3 = 0$ ,  $b: 3x + y - 4z + 7 = 0$ .
- Vysvětlete pojmy: příčka mimoběžek procházející daným bodem, nejkratší příčka mimoběžek. Uveďte příklad na krychli ABCDEFGH - mimoběžky AE, BC, bod S (střed krychle).
- Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM, průsečík přímky PQ s krychlí:



10. Sestrojte řez jehlanu ABCDEFV rovinou KLM, vysvětlete pojem - prostorová kolineace.



11. Sestrojte řez hranolu ABCDEFGHIJ rovinou PQR, vysvětlete pojem - prostorová afinita.



## 13. Vzdálenosti

1. Vypočítejte výšku  $v_c$  v trojúhelníku  $ABC : A[-2,3], B[4,-1], C[2,4]$ .

2. Určete vzdálenost přímek  $p, q$ :  
 $p : x + 2y - 10 = 0$   
 $q : x = 3 - 2t, y = 2 + t, t \in R$

3. Určete vzdálenost rovin:  
 $a : x + y + z - 6 = 0$   
 $b : x + y + z - 3 = 0$ .

4. Určete vzdálenost bodu  $K[2,6,8]$  od roviny

$a : x = 1 - r + s, y = 1 - r, z = 6 + s, r \in R, s \in R$ . Určete obraz bodu  $K$  v souměrnosti podle roviny  $\alpha$ .

5. Určete vzdálenost bodu  $M[3,-1,4]$  od přímky  $p = AB, A[0,2,1], B[1,3,0]$ .

6. Napište rovnici kružnice, je-li dán její střed  $S$  a rovnice přímky  $p$ , která se jí dotýká:

$S[1,2], p : 8x + 15y + 13 = 0$ .

7. Na základě výpočtu vzdálenosti středů kružnic  $k, l$  rozhodněte o jejich vzájemné poloze:

$$k : x^2 + y^2 + 20x + 18y + 100 = 0$$

$$l : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0$$

8. Ukažte, že množinou všech bodů  $X$  roviny, které mají od bodu  $A[-2,9]$  třikrát větší vzdálenost než od bodu  $B[6,-7]$ , je kružnice. Určete její střed a poloměr.

9. Je dán pravidelný čtyřboký hranol  $ABCDEFGH$ ,  $|AB| = a$ ,  $|AE| = v$ . Určete vzdálenost bodu  $B$  od přímky:  
 a)  $GH$       b)  $EG$       c)  $AG$   
 Řešte výpočtem i graficky.

10. Určete vzdálenost vrcholu  $A$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  od přímky  $CV$ , je-li  $|AB| = a$ ,  $|AV| = b$ . Řešte výpočtem i graficky.

11. Je dána krychle  $ABCDEFGH$ ,  $|AB| = a$ , body  $K, L$  jsou po řadě středy hran  $AB, BC$ . Určete početně i konstrukčně:

a) vzdálenost přímek  $EG, KL$       b) vzdálenost rovin  $ACH, BEG$

## 14. Odchytky

1. Jaký je vztah mezi středovým a obvodovým úhlem v kružnici? Trojúhelníku  $ABC$  je opsána kružnice, jeho vrcholy dělí kružnici na tři oblouky v poměru  $2:3:7$ . Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ .

2. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku  $ABC$ :

a)  $A[2,-1,-2]$ ,  $B[2,-4,-5]$ ,  $C[-1,-4,-2]$

b)  $A[1,2,-3]$ ,  $B[-3,3,-2]$ ,  $C[-1,1,-1]$

3. Vypočítejte souřadnice vektoru  $\vec{u}$ , který je kolmý k vektoru  $\vec{v}(3,4)$  a má velikost 15.

4. Je dána přímka  $p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = t, t \in R$ , rovina  $a: 3y + 8 = 0$ , rovina  $b: x = 5 - r - 3s, y = 16 + r - 3s, z = 3 + 4r, r \in R, s \in R$ . Vypočítejte:

a) odchylku přímky  $p$  a roviny  $a$

b) odchylku přímky  $p$  a roviny  $b$

c) odchylku rovin  $a, b$

5. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ,  $|AB| = a = 6\text{cm}$ , výška jehlanu  $v = 3\sqrt{2}\text{cm}$ . Určete:

a) odchylku přímek  $BC, AV$

b) odchylku přímky  $AV$  od roviny  $ABC$

c) odchylku rovin  $ABC, ADV$

Úlohu řešte: a) metodou stereometrie - výpočtem a konstrukčně

6. Je dána krychle s hranou délky  $a$ . Určete odchylku:

a) dvou stěnových úhlopříček

b) dvou tělesových úhlopříček

c) stěnové a tělesové úhlopříčky

7. Pod jakým úhlem je vidět kružnici  $k: x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$  z bodu  $P[0,0]$ ?

## 15. Obvody, obsahy, objemy a povrchy

1. Vypočítejte obsah trojúhelníku, je-li dáno:

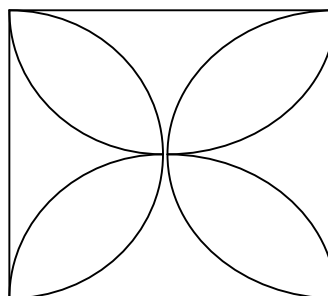
a)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $v_a = 3 \text{ cm}$

b)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $g = 30^\circ$

c)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,  $c = 13 \text{ cm}$  (dokažte, že jde o pravoúhlý trojúhelník)

2. Trojúhelníky  $ABC$ ,  $KLM$  jsou podobné s poměrem podobnosti  $k$ . Co platí o poměru jejich výšek, obvodů, obsahů?

3. Nad stranami čtverce o straně délky  $a$  jsou sestrojeny uvnitř čtverce půlkružnice. Určete obsah obrazce, který vyvábí - viz obrázek.



4. Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky  $a = 22 \text{ cm}$ ,  $c = 12 \text{ cm}$ , je-li jeho výška o  $1 \text{ cm}$  menší než délka ramene.

5. Obvod kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru  $12 \text{ cm}$ , je  $39 \text{ cm}$ . Vypočítejte její obsah.

6. Úhlopříčný řez kváдру kolmý k rovině podstavy je čtverec s obsahem  $4225 \text{ cm}^2$ . Jedna podstavná hrana je o  $23 \text{ cm}$  delší než druhá. Vypočítejte objem a povrch tělesa.

7. Délka všech hran pravidelného čtyřbokého jehlanu je  $a = 36 \text{ cm}$ . Vypočítejte jeho objem a povrch.

8. Podstava kolmého hranolu je pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky v poměru  $3 : 4$ . Výška hranolu je o  $2 \text{ cm}$  menší než větší odvěsna podstavy a povrch hranolu je  $468 \text{ cm}^2$ . Vypočítejte objem hranolu.

9. Osový řez nádoby, která má tvar rotačního válce, je obdélník s úhlopříčkou  $u = 39 \text{ cm}$ . Poměr obsahu pláště a obsahu podstavy je  $5 : 3$ . Kolik litrů vody se vejde do nádoby?

10. Určete objem a povrch komolého kužele, jehož podstavy jsou kruh opsaný a vepsaný protilehlým stěnám krychle s hranou délky  $a$ .

11. Určete poměr objemů rotačního válce, polokoule a rotačního kužele se stejnými poloměry podstav a stejnými výškami.

## 16. Kružnice a elipsa

1. Vyslovte definici kružnice, kruhu, elipsy.
2. Zapište rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka  $AB$ ,  $A[2,-2]$ ,  $B[-2,-5]$ .
3. Zjistěte, pro které hodnoty parametru  $p$  je rovnice  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + p = 0$  rovnicí kružnice. Určete souřadnice středu a poloměr.
4. Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ ,  $A[2,1]$ ,  $B[3,0]$ ,  $C[0,5]$ .
5. Zapište rovnice kružnic, které se dotýkají souřadnicových os a procházejí bodem  $A[2,1]$ .
6. Napište rovnice tečen kružnice dané rovnicí  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$  v jejích průsečících s přímkou  $p: y = x + 3$ .
7. Určete rovnici tečny ke kružnici  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$ , která je rovnoběžná s přímkou  $p: y = x$ .
8. Napište rovnici elipsy, jejíž osy splývají s osami souřadnými a která prochází body  $K[2\sqrt{3}, \sqrt{6}]$ ,  $L[6,0]$ .
9. Napište rovnici elipsy se středem  $S[-2,4]$ , hlavní vrchol  $A[-2,8]$ , excentricita  $e = 3$ .
10. Proveďte rozbor elipsy, určete:  $S, A, B, C, D, E, F, a, b, e, o_1, o_2$ :
  - a)  $4x^2 + 9y^2 = 36$
  - b)  $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$
11. Určete vzájemnou polohu elipsy  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$  a přímky  $p: 2x + 3y - 6 = 0$ .
12. Napište rovnice tečen elipsy:  $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$  v jejích průsečících s přímkou  $p: 2x + y = 0$ .
13. Ukažte, že pro každé  $t \in R$  leží bod  $[a \cos t, b \sin t]$  na elipse, která má rovnici  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ .



## 17. Hyperbola

1. Grafem jaké funkce je rovnoosá hyperbola? Zapište její rovnici a rovnice asymptot. Jaká je vzájemná poloha asymptot?

2. Vyslovte definici hyperboly.

3. Hyperbola má ohniska  $E[-5,0]$ ,  $F[5,0]$ , a prochází bodem  $M[1,0]$ . Napište její rovnici.

4. Napište rovnici hyperboly s ohnisky  $E[0,2]$ ,  $F[0,6]$ , která prochází bodem  $L[0,3]$ .

5. Proveďte rozbor hyperboly, určete:  $S, A, B, E, F, a, b, e, o_1, o_2, h_1, h_2$

a)  $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 = 0$

b)  $x^2 - y^2 + 6x + 6y + 4 = 0$

6. Určete vzájemnou polohu přímky  $p$  a hyperboly  $H$ , popř. souřadnice společných bodů:

$$H : x^2 - 4y^2 = 16$$

a)  $p : x = 4 - t, y = 1,5t, t \in R$

b)  $p : 5x - 6y - 16 = 0$

c)  $p : x = -2 + 2t, y = -3 + t, t \in R$

7. Určete vzájemnou polohu přímky  $p : 5x - 2y + 2t = 0$ , hyperboly  $H : 4x^2 - y^2 = 36$  v závislosti na parametru  $t$ .

8. Napište rovnici tečny k hyperbole  $H : 4x^2 - 45y^2 - 24x - 180y - 324 = 0$  v bodě  $T[-12,2]$ . Jakými způsoby lze úlohu řešit?

9. Určete rovnici hyperboly, která má svá ohniska v hlavních vrcholech elipsy a své vrcholy v ohniscích elipsy o rovnici:  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

10. Sestrojte graf relace  $4x^2 - 9y^2 = 36 \wedge |y| \leq 2$ .

11. Vypočítejte odchylku tečen hyperboly  $x^2 - y^2 = 64$ , které procházejí bodem  $R\left[12, \frac{28}{3}\right]$ .

## 18. Parabola

- Sestrojte grafy relací:  $y = x^2$ ,  $y = -x^2$ ,  $x = y^2$ ,  $x = -y^2$ .
- Vyslovte definici paraboly.
- Zapište vrcholovou rovnici paraboly, je-li dáno ohnisko  $F$ , řídicí přímka  $d$ :
  - $F[4,0]$ ,  $d : y = 2$
  - $F[4,2]$ ,  $d : y = -1$
  - $F[6,2]$ ,  $d : x = 8$
  - $F[4,4]$ ,  $d : x = 2$
- Zapište vrcholovou rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou  $y$ , má vrchol  $V[3,5]$  a prochází bodem  $A[0,2]$ .
- Je dána trojice bodů  $A[2,4]$ ,  $B[-1,7]$ ,  $C[1,3]$ . Určete rovnici paraboly, která prochází body  $A, B, C$  a má osu rovnoběžnou s osou  $y$ . Načrtněte obrázek.
- Proveďte rozbor paraboly, určete:  $V, F, p, o, d$ :
  - $x^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
  - $y^2 + 4y + 4x - 4 = 0$
- Určete vzájemnou polohu přímky  $p$ , paraboly  $P$ , souřadnice společných bodů:
  - $p : 3x - 2y + 5 = 0$   $P : y^2 = 20x$
  - $p : x + y - 3 = 0$   $P : y^2 = -8x$
  - $p : x + 2y - 4 = 0$   $P : x^2 + 32y = 0$
  - $p : x - 4 = 0$   $P : x^2 + 32y = 0$
- Parabola o rovnici  $2px = y^2$  se dotýká přímky, která má rovnici  $3x - 4y + 6 = 0$ . Určete parametr paraboly a souřadnice bodu dotyku.
- Určete rovnici tečny paraboly  $P$  v jejím bodě  $T$ :  $P : y = 2x^2 - 5x + 1$   $T[2, y_T]$
- Určete velikost úhlu, pod nímž je z bodu  $M$  vidět parabolu  $P$ :  $M[0,3]$   $P : 4x = y^2$
- Vypočítejte odchylku tečen kružnice  $K : x^2 + y^2 = 225$  a paraboly  $P : y^2 = 16x$  v jejich společných bodech.
- Průměr parabolického automobilového reflektoru je  $24cm$ , hloubka reflektoru je  $12cm$ . Určete rovnici parabolického řezu a vypočítejte polohu vlákna žárovky, je-li reflektor zapnut na dálková světla (vlákno je v ohnisku).
- Vypočítejte obsah obrazce omezeného parabolou  $y^2 = x$  a přímkou  $x + y - 2 = 0$ .

## 19. Posloupnost, aritmetická posloupnost

1. Jak je definována posloupnost?

Vysvětlete rozdíl mezi zadáním posloupnosti  $n$ -tým členem a rekurentním předpisem posloupnosti.

2. Zjistěte, která z čísel  $-12, 65, -242$  jsou členy posloupnosti, kde  $a_n = -5n + 8$ .

3. Určete rekurentní předpis posloupnosti: a)  $a_n = n + 2$  b)  $a_n = n(n + 1)$

4. Danou posloupnost vyjádřete vzorcem pro  $n$ -tý člen:  $a_1 = 0$ ,  $a_{n+1} = 3 + a_n$

5. Napište definici posloupnosti:

a) rostoucí b) klesající c) omezené shora (zdola) d) omezené

Vyšetřete tyto vlastnosti na posloupnosti:  $a_n = \frac{2n}{2n+1}$

6. Jak je definována aritmetická posloupnost?

Pro jaké hodnoty difference  $d$  je aritmetická posloupnost: a, rostoucí b, klesající

7. Dokažte, že posloupnost  $a_n = 5n - 2$  je aritmetická.

8. Určete aritmetickou posloupnost  $(a_1, d)$ , ve které platí:

a,  $a_1 + a_5 = 30 \wedge a_3 + a_4 = 36$  b,  $s_5 = 60 \wedge s_{10} = 170$

c,  $a_4 + a_5 = 4 \wedge a_4 \cdot a_5 = -5$

9. Součin tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti se rovná jejich součtu,  $d = \frac{13}{3}$ .

Určete tyto členy.

10. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Určete jejich velikost, je-li obsah trojúhelníka  $6 \text{ dm}^2$ .

11. Vypočítejte:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$

12. Teploty Země přibývá směrem do jejího středu o  $1^\circ \text{C}$  na  $33 \text{ m}$ . Jaká je teplota v hloubce  $1015 \text{ m}$ , je-li v hloubce  $25 \text{ m}$  teplota  $9^\circ \text{C}$ ?

13. Určete velikost ostrého úhlu  $x$ , tvoří-li  $\cotg x$ ,  $(\sin x)^{-1}$ ,  $\tg x$  tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti?

14. Vypočítejte součet všech trojčiferných přirozených čísel dělitelných pěti.

## 20. Geometrická posloupnost, nekonečná geometrická řada

1. Jak je definována geometrická posloupnost?

2. Dokažte, že posloupnosti: a)  $a_n = \frac{2}{(-2)^n}$  b)  $b_n = 2^n \cdot 3^{2-n}$

jsou geometrické. Určete  $a_1, q$ .

3. V geometrické posloupnosti platí:  $a_1 - a_3 = -1,5 \wedge a_2 + a_1 = 1,5$ . Určete  $a_1, a_4, s_4$ .

4. V geometrické posloupnosti je  $a_1 = 2, q = 3, s_n = 80$ . Určete  $n, a_n$ .

5. Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby vznikla geometrická posloupnost, přičemž součet vložených čísel je 630.

6. Dokažte: Je-li  $a_n$  geometrická posloupnost, potom pro každé přirozené číslo  $n$  platí:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

7. Přičteme-li k číslům 2,16,58 stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti  $s_4$ .

8. Mezi čísla 3,18 vložte dvě čísla tak, aby první tři tvořila geometrickou posloupnost a poslední tři posloupnost aritmetickou.

9. Délky hran kváдру tvoří geometrickou posloupnost. Objem  $V = 216 \text{ cm}^3$ . Součet délek hran, vycházejících z jednoho vrcholu, je  $21 \text{ cm}$ . Určete délky hran.

10. Délky stran  $a, b, c$  trojúhelníku  $ABC$  tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Jak jsou velké, je-li délka strany  $b = 8 \text{ cm}$  a obvod  $o = 42 \text{ cm}$ .

11. Kratší úhlopříčka, strana a delší úhlopříčka kosočtverce mají délky, které tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypočítejte velikosti úhlů kosočtverce.

12. Pro které hodnoty kvocientu  $q$  je geometrická posloupnost konvergentní? Vysvětlete pojem nekonečné geometrické řady a odvoďte vzorec pro její součet.

13. Zjistěte, které z nekonečných řad jsou konvergentní a určete jejich součty:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1,2^n$$

14. Dokažte správnost rovnosti:  $\frac{0,4\overline{6}}{0,6\overline{3}} = \frac{11}{15}$

15. Zjistěte, pro která  $x$  je nekonečná geometrická řada konvergentní a určete pak její součet:

$$1 + (x+3) + (x+3)^2 + (x+3)^3 + \text{K}$$

16. Vypočítejte:  $\frac{1 + 2 + 3 + \text{K} + n}{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \text{K}}$

17. Řešte v R:

$$\text{a) } \frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + K$$

$$\text{b) } \frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + K$$

$$\text{c) } \log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + K = 2$$

$$\text{d) } 2^x + 4^x + 8^x + 16^x + K = 1$$

18. Řešte v  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + K = 2 \operatorname{tg} x$

19. Je dán čtverec o straně délky  $a$ . Do něho je vepsán čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce. Takto vzniklému čtverci je opět vepsán čtverec s vrcholy ve středech stran předchozího čtverce atd. Postup se stále opakuje.

Určete: a) součet obvodů všech čtverců

b) součet obsahů všech čtverců

## 21. Variace, kombinace a permutace bez opakování, kombinační čísla

1. Vyslovte definici variace, kombinace a permutace bez opakování.

2. Definujte číslo  $n!$ .

3. Vysvětlete pojem: kombinační číslo  $\binom{n}{k}$

4. Zjednodušte výrazy:

$$a) \frac{(n+2)!}{n!} - 2 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$b) \frac{n!}{(n-2)!} - 2 \binom{n}{2}$$

5. Řešte rovnice:

$$a) \frac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28$$

$$b) \binom{n-1}{n-3} - n = 8$$

$$c) n \frac{(n+3)!}{(n+2)!} + n = 140$$

$$d) \frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{2} = 4$$

$$e) x! = 210(x-2)!$$

$$f) (n!)^2 - 7n! + 6 = 0$$

6. V  $\mathbb{R}$  řešte rovnici s neznámou  $x$  a parametrem  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{(n-1)! + 2(n-1)! + 3(n-1)! + K + n(n-1)!}{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{4} + K} = \frac{(n+1)!}{4x}$$

7. Jsou dány cifry 0,1,2,3,4,5,6,7. Určete počet přirozených čísel, ve kterých se cifry neopakují a splňují podmínky:

a) jsou pěticiferná      b) jsou čtyřciferná sudá      c) jsou větší než 60000 a zároveň menší než 300000

8. Určete počet všech pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z cifer 0,1,3,4,7. Kolik z těchto čísel je:  
a) dělitelných šesti?      b) větších než 70134?

9. V rovině je dáno 20 bodů, z nichž právě 5 leží na jedné přímce. Kolik je těmito body určeno:

a) přímek      b) trojúhelníků      c) kružnic

10. Určete, kolika způsoby lze z 10 mužů a 6 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou:

a) právě 2 ženy      b) aspoň 2 ženy

11. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $a, b$ . Na přímce  $a$  je dáno 15 různých bodů  $A_1, \dots, A_{15}$ , na přímce  $b$  12 různých bodů  $B_1, \dots, B_{12}$ . Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

**12.** K sestavení vlajky, složené ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

- Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
- Kolik z nich má modrý pruh ?
- Kolik jich má modrý pruh uprostřed ?
- Kolik jich nemá uprostřed červený pruh ?

**13.** O telefonním čísle víme: je šestimístné, začíná sedmičkou, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné 25 . Kolik telefonních čísel přichází v úvahu?

**14.** Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet tříčlenných variací bez opakování:

- desetkrát
  - o 150
- Určete původní počet prvků.

**15.** Určete počet prvků tak, aby:

- bylo možno z nich vytvořit právě 40320 permutací bez opakování
- při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací bez opakování zvětšil *56krát*
- při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací bez opakování zmenšil *20krát*

**16.** Určete počet prvků tak, aby:

- počet 4 členných kombinací bez opakování z nich vytvořených byl *20krát* větší než počet 2 členných kombinací bez opakování
- při zvětšení počtu prvků o 1 se počet 3 členných kombinací bez opakování zvětšil o 21

## 22. Variace, kombinace a permutace s opakováním, binomická věta

1. Definujte variace, permutace, kombinace s opakováním, napište vzorce pro výpočet  $V'(k, n)$ ,  $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $K'(k, n)$ .
2. Státní poznávací značka je tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena (lze použít 26 písmen  $A, B, \dots, Y, Z$  a další čtyři číslice. Určete, kolik značek lze sestavit.
3. Jsou dány cifry  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Kolik z nich lze vytvořit přirozených čísel větších než 3000 a zároveň menších než 50000? Kolik z nich je sudých?
4. Doplňte a vysvětlete, co znamená:  $P'(1, 1, K, \dots, 1) = ?$  (jedniček v závorce je  $n$ ).
5. Co je to „anagram“? Kolik anagramů lze vytvořit ze slova *DEKADENCE*? Kolik z nich začíná písmenem *D*? Kolik z nich nezačíná dvojicí písmen *DE*?
6. Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšců)  
a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice  $8 \times 8$   
b) na libovolné dvě řady šachovnice  $8 \times 8$
7. Určete počet všech kvádrů, jejichž velikosti jsou přirozená čísla nejvýše rovna 10. Kolik je v tomto počtu krychlí?
8. Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel  $4, 5, 6, 7$ . Kolik z nich je pythagorejských?
9. Co je to Apolloniova úloha? Určete jejich počet. Ukažte řešení úloh BBB, PPP.
10. Dokažte vztahy: a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$     b)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
11. Vysvětlete Pascalův trojúhelník a jeho význam pro binomickou větu.
12. Vypočtete pomocí binomické věty: a)  $(x^2 + 2)^5$     b)  $(\sqrt{3} + 2)^4$     c)  $(2 + i)^6$
13. V rozvoji výrazu  $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$  určete  $x$  tak, aby 5. člen rozvoje byl 105.
14. Který člen rozvoje  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{14}$  obsahuje  $x^6$ ?
15. Pomocí binomické věty dokažte: Číslo  $11^{10} - 1$  je dělitelné stem.



## 23. Pravděpodobnost, statistika

- U rodin s 3 dětmi zjišťujeme pohlaví dětí. Vypište:
  - všechny možné výsledky, jestliže záleží na pořadí dětí podle věku
  - výsledky příznivé jevu  $A$ : nejmladší dítě je dívka
- Vysvětlete pojmy:
  - pravděpodobnost jevu  $A$  :  $P(A)$
  - jev jistý
  - jev nemožný
  - jev opačný
 Jakých hodnot může pravděpodobnost nabývat ?
- Určete pravděpodobnost jevu  $A$  : náhodně zvolené dvojciferné číslo je dělitelné 7 .
- Ze třídy o 27 žácích mají být losem určeni 4 žáci, kteří se podrobí testu. Určete počet všech možných výsledků losování. Jaká je pravděpodobnost, že budeš vylosován právě ty?
- Z 10 dobrých a 8 vadných výrobků vybíráme 6 výrobků.  
Určete pravděpodobnost jevu  $A$  : ve výběru jsou nejvýše 2 vadné výrobky.
- Pro dva jevy platí obecně vztah:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .  
Kdy platí vztah:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ? Jak se nazývají takové dva jevy ?
- Hodíme bílou a modrou kostkou,  $b$  je číslo, které padlo na bílé kostce,  $m$  je číslo, které padlo na modré kostce. Najděte  $P(A \cup B)$ ,  $A: b + m = 7$ ,  $B: b = 4$ .
- 10 studentů, mezi nimiž jsou Adam a Břetislav, má ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adam nebo Břetislav budou mezi vylosovanými?
- Vysvětlete Bernoulliovo schéma:  $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$   
a použijte ho při řešení příkladů:
  - Jaká je pravděpodobnost, že při desetinasobném hodu mincí padne líc nejvýše 2krát ?
  - Pravděpodobnost výroby vadné součástky je 0,05 . Jaká je pravděpodobnost, že mezi 60 vyrobenými součástkami je právě 5 vadných?
- Příklad: zkoumáme soubor všech žáků třídy 8.A z těchto pohledů:  
a, věk                      b, výška                      c, váha                      d, prospěl s vyznamenáním                      e, prospěl  
f, neprospěl                      g, pohlaví  
Vysvětlete na příkladu pojmy:
  - statistický soubor
  - statistická jednotka
  - statistický znak - kvantitativní, kvalitativní
  - četnost znaku, relativní četnost znaku
  - spojnicový, sloupkový, kruhový diagram
  - aritmetický, geometrický průměr, modus, medián

## 24. Funkce a její limita, derivace funkce

1. Vysvětlete pojmy:
- vlastní limita ve vlastním bodě
  - vlastní limita v nevlastním bodě
  - nevlastní limita ve vlastním bodě
  - nevlastní limita v nevlastním bodě

2. Načrtněte graf funkce  $f : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  a určete:

a)  $D(f), H(f)$        $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$        $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

- Jaký je vztah mezi jednostrannými a oboustrannou limitou funkce v bodě?
- Jaký je vztah mezi spojitostí a limitou funkce v bodě?
- Lze dodefinovat funkci  $f$  ze zadání tak, aby byla spojitá v bodě 2 ?

3. Vypočítejte limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + x - 4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

4. Vypočítejte limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

5. Vypočítejte limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^5 + 4x - 1}{5x^5 - 7x^4 + 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^6 + 4x - 1}{5x^5 - 7x^4 + 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^5 + 4x - 1}{5x^6 - 7x^4 + 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} - \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4 + 2}}$

6. Vypočítejte limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x + x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \sin x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$

7. Vypočítejte limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x^2 - 4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x^2 - 4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x^2 - 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{x^2 - 4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2}{x^2 - 4}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x^2 - 4}$

8. Napište definici derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a vysvětlete její

a) geometrický

b) fyzikální význam.

Pomocí definice vypočítejte derivaci funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0 = 2$ .

9. Odvoďte pravidlo pro derivaci funkce  $y = x^3$  podle definice.

10. Vypočítejte první derivaci funkce:

a)  $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt{x}}$

b)  $y = -x^4 + 7 \sin x - 2 \cos x + 3e^x$

c)  $y = x \sin x + \cos x$

d)  $y = xe^x - x^2 \ln x + 3x^2$

e)  $y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

f)  $y = \frac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$

g)  $y = 2 \cos^2 x + 3 \sin x^3$

h)  $y = \ln \frac{2 - x}{2 + x}$

## 25. Průběh funkce

1. Určete monotónnost, lokální minimum a lokální maximum funkce  $f$  v jejím definičním oboru:

a)  $f : y = x^3 - 12x$

b)  $f : y = xe^{-x}$

c)  $f : y = \ln^2 x$

2. Určete konvexitu, konkávitu, inflexní body funkce  $f$  v jejím definičním oboru:

a)  $f : y = x^4 - x^3$

b)  $f : y = e^{-x^2}$

3. Určete průběh funkce:

a)  $f : y = \frac{x}{1-x^2}$

b)  $f : y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c)  $f : y = x^3 - 3x^2$

d)  $f : y = \ln(4-x^2)$

$x \in \langle -1, 4 \rangle$

4. Napište rovnici tečny ke grafu funkce  $f$  v jejím bodě  $T$  :

a)  $f : y = \cos x \quad T\left[\frac{\pi}{6}, ?\right]$

b)  $f : y = x \ln x \quad T[e, ?]$

5. Určete rovnici tečny ke křivce  $x^2 + y^2 = 2$  v bodě  $T[1, -1]$ .

Úlohu řešte alespoň dvěma způsoby.

6. Určete rovnici tečny ke křivce  $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$  v jejích průsečících s osou  $x$ .

7. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

8. Určete rozměry válcové silážní jámy s objemem  $V = 27 \text{ m}^3$  tak, aby na vyzdění dna a stěn byla minimální spotřeba materiálu.

9. Průřez tunelu má tvar obdélníku s přilehlým půlkruhem. Obvod průřezu je  $18 \text{ m}$ . Při jakém poloměru půlkruhu bude obsah průřezu největší ?

## 26. Primitivní funkce, výpočty integrálů

1. Definujte pojem primitivní funkce.

Dokažte, že funkce  $F : y = \sin^2 x$ ,  $G : y = \frac{2 - \cos 2x}{2}$  jsou primitivní funkce k téže funkci  $f$  a určete konstantu, o kterou se liší.

2. Vypočítejte pomocí integrování základních funkcí:

a)  $\int \sqrt[7]{x^3} dx$

b)  $\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx$

c)  $\int \frac{(4-x)^2}{x^3} dx$

d)  $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

e)  $\int \cotg^2 x dx$

f)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

3. Vypočítejte metodou „per partes“:

a)  $\int x \cos x dx$

b)  $\int x^2 \sin x dx$

c)  $\int x e^{2x} dx$

d)  $\int x^2 \ln x dx$

e)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

4. Vypočítejte substituční metodou:

a)  $\int 5x e^{x^2} dx$

b)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

c)  $\int 3x^4 \sqrt{x^2 + 5} dx$

d)  $\int 2 \sin x \cos^3 x dx$

e)  $\int \sin^3 x dx$

f)  $\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx$

7. Vypočítejte substituční metodou:

a)  $\int \frac{3}{2x-3} dx$

b)  $\int \frac{3}{x^2 - 4x + 4} dx$

c)  $\int \frac{1}{4x^2 + 9} dx$

d)  $\int \sin x \sqrt{2 - \cos x} dx$

## 27. Určitý integrál a jeho použití

1. Vysvětlete pojem určitý integrál, uveďte vzorec pro jeho výpočet.

2. Vypočítejte pomocí integrování základních funkcí

$$\text{a) } \int_1^4 \left( -x + \frac{4}{x} \right) dx \qquad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

3. Vypočítejte substituční metodou:

$$\text{a) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \qquad \text{b) } \int_{-4}^2 \sqrt{17 + 4x} dx$$

4. Vypočítejte: a)  $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

b) obsah útvaru omezeného křivkami:  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$

Jaký je vztah mezi úlohami a) b)?

5. Vypočítejte obsah útvaru, který je omezen danými křivkami. Nakreslete příslušný obrázek.

a)  $y = -x^2 + 2x - 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = -3$

b)  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = e$

c)  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$

d)  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$

e)  $y = x^2$ ,  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $y = 4$

f)  $x = 0$ ,  $y = 4x + 4$ ,  $y = -x^2 + 9$ ,  $y = x^2 + 1$

7. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu:

a) rotačního válce

b) rotačního kužele

c) koule

d) komolého kužele

8. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného danými křivkami kolem dané osy:

a)  $y = x$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$

kolem osy x

b)  $y = x^2$ ,  $y = x$

kolem osy x, kolem osy y

c)  $x^2 - y^2 = 4$ ,  $y = -2$ ,  $y = 2$

kolem osy y

d)  $y = 1 - x^2$ ,  $y = x^2$

kolem osy x

9. Vypočítejte délku křivky  $y = \frac{2+x^6}{8x^2}$  v intervalu  $\langle 1,2 \rangle$ . Vzorec:  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$