2. písemná práce – oddělení A – 23. 1. 2017 – třída 4. A4

1. Kolik peněz musí pan Dvořák uložit, aby při ročním úročení 1,3% a dani z úroku 15% měl za deset let 75 000,- Kč? Výsledek zaokrouhlete na celé koruny.

$A_{10} = A_0\left(1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right)^{10}$ $\qquad A_0 = \frac{A_{10}}{\left(1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right)^{10}} = \frac{75000}{(1+0{,}013\cdot 0{,}85)^{10}} = 67194{,}6859 \doteq 67195$,-Kč

Pokud chce mít pan Dvořák po deseti letech 75000,- Kč, musí uložit za daných podmínek částku 67195,- Kč.

2. Pan Šťastný vyhrál 500 000 Kč. Počátkem roku uloží tuto částku na úrok 1,2%, daň z úroku je 15%. Kolik peněz může na konci každého roku vybírat, jestliže vybírá jen úroky?

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right) = A_0 + A_0\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)$$

$$\acute{U}rok = A_0\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1-\frac{d}{100}\right) = 500000\cdot 0{,}012\cdot 0{,}85 = 5100,-K\check{c}$$

Pan Šťastný může na konci každého roku vybírat úrok 5100,- Kč.

3. Danou nekonečnou geometrickou řadu zapište pomocí sumy.

1 + 4 + 16 + 64 + 256 + . . . = $\sum_{n=1}^{+\infty} 4^{n-1}$

**4.** Určete součet řady $5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$ = $\mathbf{\frac{15}{2}}$

$a_1 = 5$ ; $q = \frac{1}{3}$; $|q| < 1$ ; $s = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}$

5. Nekonečná geometrická řada má součet 7 a její kvocient má hodnotu 0,2. Jakou hodnotu má první člen řady? Rozepište řadu ve tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$

$$s = \frac{a_1}{1-q}; 7 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{5}}; 7 = \frac{a_1}{\frac{4}{5}}; a_1 = \frac{28}{5}$$

$$\frac{28}{5}+\frac{28}{25}+\frac{28}{125}+\frac{28}{625}\ldots$$

6. Periodické číslo $0,\overline{27}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

$0,\overline{27} = 27\cdot 10^{-2} + 27\cdot 10^{-4} + 27\cdot 10^{-6} + \cdots = 27\cdot(10^{-2}+10^{-4}+10^{-6}+\cdots) = 27\cdot\frac{1}{99} = \frac{3}{11}$

$a_1 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$;

$q = 10^{-2} = \frac{1}{100}$; $|q| < 1$ ; $s = \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{99}$

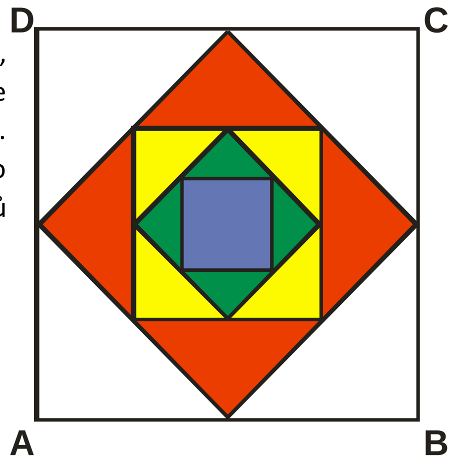
7. Vypočítejte $8 \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[16]{8} \cdot \sqrt[64]{8} \cdot \ldots$

$8 \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[16]{8} \cdot \sqrt[64]{8} \cdot \ldots = 8 \cdot 8^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{16}} \cdot 8^{\frac{1}{64}} \cdot \ldots = 8^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots} = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

8. Určete, pro která $x \in R$ je nekonečná geometrická řada konvergentní, potom určete součet této řady.
$1 + (x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + \ldots$

$a_1 = 1\,; q = x - 2\,;\ |x - 2| < 1\,; x \in (1; 3)\,; s = \frac{1}{3-x}$

9. Čtverec ABCD má stranu délky 8 cm. Do něho je vepsán červený čtverec, jehož vrcholy leží ve středech stran čtverce ABCD. Do červeného čtverce je vepsán žlutý, jehož vrcholy jsou ve středech stran červeného čtverce. Takto budeme vepisovat zelený čtverec do žlutého, modrý do zeleného atd. Vepisování čtverců pokračuje do nekonečna. Určete součet obsahů všech čtverců.




$S_1 = 64\ cm^2$
$S_2 = 32\ cm^2$
$S_3 = 16\ cm^2$
.
.
.
$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = 64 + 32 + 16 + \ldots = 128\ cm^2$

BODOVÉ HODNOCENÍ JEDNOTLIVÝCH ÚLOH (3; 3; 1; 3; 3; 3; 3; 3; 3) – CELKEM MAXIMÁLNĚ 25 BODŮ

ZNÁMKOVÉ HODNOCENÍ:

| Známka | Body |
|---|---|
| 1 | 23 - 25 |
| 2 | 19 - 22 |
| 3 | 14 - 18 |
| 4 | 9 - 13 |
| 5 | 0 - 8 |